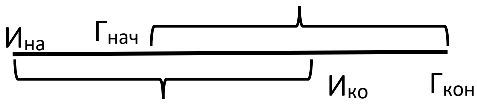
8 класс, решения

***Задача* 1**. Обозначим за $S(a)$ сумму цифр натурального числа a. Существуют ли такие различные натуральные числа n, m, (n>10, m>10) в записи которых нет нулей, для которых $S(nm)=S(n)\cdot S(m)$?

Ответ:** да, существуют. **Решение. Например, 11 и 22. 11·22 = 242, $S(11) = 2$, $S(22) = 4$, $S(242) = 8$, 2·4 = 8.

<u>Критерии.</u> Особых критериев нет.

***Задача* 2**. В городах Г и И проходила олимпиада по математике. В обоих городах она началась в 10 часов по местному времени и длилась одинаковое время. При этом в городе Г олимпиада началась на 2 часа раньше, чем закончилась в городе И, а закончилась на 8 часов позже, чем началась в городе И. Сколько времени отводилось на решение олимпиады?

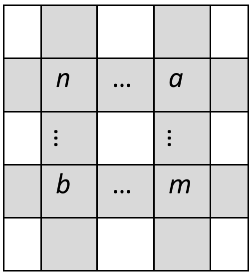


Ответ:** 5 часов. **Решение. Изобразим события на временной шкале (см. рис.) Получается, что временно отрезок от начала в И до окончания олимпиады в Г длиной в 8 часов покрыт двумя отрезками одинаковой длины (равной длительности олимпиады). При этом отрезок от начала в Г и до конца в И длиной 2 часа покрыт дважды. Значит, общая длина олимпиады равна (8+2):2 = 5 часов.

<u>Критерии.</u> Ответ без обоснований – 1 балл. Подбор ответа или перебор каких-то случаев (например, исмходя из того, чт о разница между городами составляет целое число часов) обоснованием не считается. Если нарисована схема (см. выше), но нет никаких других обоснований и вычислений, сразу ответ – 2 балла. Если при верном ходе решения перепутаны знаки или перепутаны города, в силу чего получился неверный ответ – 5 баллов.

***Задача* 3.** Натуральные числа от 1 до 100 расставлены в клетки таблицы 10×10 (по одному числу в каждую клетку). Число называется минимаксным, если оно наибольшее в своей строке и наименьшее в своем столбце. Какое наибольшее количество минимаксных чисел может оказаться в таблице?

Ответ:** одно. **Решение. Допустим, что в таблице хотя бы два минимаксных числа n и m. Тогда они не могут находиться в одной строке или в одном столбце. Закрасим столбцы и строки, в которых находятся минимаксные числа и рассмотрим пересечения закрашенных строк и столбцов, отличные от минимаксных (см. рис.) Пусть там стоят числа a и b. Тогда по условию с одной стороны, $n>a>m$, с другой стороны, $n<b<m$. Противоречие.

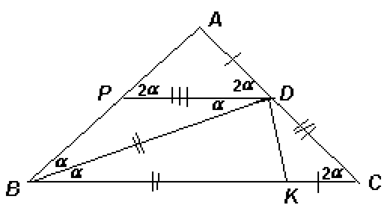


Пример на одно минимаксное число. Пусть в первой строчке стоят числа от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д., в последней – от 91 до 100. Тогда в это таблице одно минимаксное число, это 10 (в правом верхнем углу).

<u>Критерии.</u> Ответ без обоснования – 1 балл. Ответ с примером – 2 балла. Обоснования без примера – 5 баллов. Обоснования, из которых очевиден (так или иначе построен) пример, но он отдельно не выделен – 6 баллов. Пример и правдоподобные рассуждения на примере, которые, если бы они не опирались на конкретный пример, можно было бы обобщить до правильного решения – 3 балла.

***Задача* 4.** В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) провели биссектрису BD. Оказалось, что $BC=BD+AD$. Найдите $\angle BAC$.

Ответ:** 100°. **Решение. Отметим на стороне BC точку K так, чтобы $BK = BD$, тогда $CK = AD$ (см. рис.). Пусть $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$, тогда $\angle ACB = 2\alpha$. Проведем $DP \parallel BC$. Так как $\angle PDB = \angle DBC = \alpha$, то треугольник BPD – равнобедренный ($BP = PD$). Треугольник APD – также равнобедренный с углом 2α при основании PD. Учитывая, что $BP = CD$ получим равенство треугольников APD и KDC ($AD = KC$, $PD = DC$, $\angle ADP = \angle KCD$). Следовательно, треугольник KDC – равнобедренный и $\angle CDK = 2\alpha$. Значит, в равнобед-



ренном треугольнике *BDK* угол при основании равен 4α. Используя для этого треугольника теорему о сумме углов, получим: $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180$, откуда $\alpha = 20$. Следовательно, $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha = 100^\circ$.

<u>Критерии.</u> Верные построения (например, проведена прямая, параллельная BC) – 2 балла. Если есть верные построения и доказано ключевое равенство треугольников APD и KDC, но нет дальнейших продвижений – 3 балла.

***Задача* 5.** Известно, что для некоторых *a*, *b*, *c*, *d* верно, что $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}=1.$ Найдите, чему может быть равно число $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}$.

Ответ: *0*. ***Решение.*** Домножим обе части равенства на (*a*+*b*+*c*+*d*). Получим $\frac{a(a+b+c+d)}{b+c+d}+\frac{b(a+b+c+d)}{c+d+a}+\frac{c(a+b+c+d)}{d+a+b}+\frac{d(a+b+c+d)}{a+b+c}=a+b+c+d$. Преобразуем левую часть $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{a(b+c+d)}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{b(a+c+d)}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{c(a+b+d)}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}+\frac{d(a+b+c)}{a+b+c}$ = $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}+a+b+c+d$, что равно *a*+*b*+*c*+*d*, откуда искомое выражение равно 0.

<u>Критерии.</u> Особых критериев нет.

***Задача* 6.** Обозначим за $a\lozenge b = \frac{a-b}{\text{НОД}\,(a,b)}$ для натуральных *a*, *b*. Оказалось, что для некоторого натурального *n* <1000 и для всех натуральных *k* от 1 до *n*–1 верно, что НОД ($n\lozenge k$, *k*) = 1. Найдите, сколько существует таких составных *n*.

Ответ: 25 чисел **.** ***Решение.*** Докажем, что утверждение верно в том и только в том случае, когда *n* – степень простого числа. Пусть $n=p^t$**.** Если НОД(*k*, *n*)=1, то $n\lozenge k = n-k$, НОД ($n\lozenge k$, *k*) = НОД (*n*–*k*, *k*) = 1. Если НОД(*k*, *n*)≠1, то $k=p^s$, *s*<*t*. Тогда $n\lozenge k = \frac{p^t-p^s}{p^s}=p^{t-s}-1$, и НОД ($n\lozenge k$, *k*) = НОД ($p^{t-s}$–1, p^s)=1.

Пусть *n* не является степенью простого числа. Тогда представим *n* как произведение двух взаимно простых чисел *f* и *g*, *f*>*g*>1. Рассмотрим *k*=(*f*–*g*)*g*. Это натуральное число, меньшее *n*. Тогда НОД (*n*, *k*) = *g*, $n\lozenge k = \frac{fg-(f-g)g}{g}=g$. Тогда НОД ($n\lozenge k$, *k*) = НОД (*g*, (*f*–*g*)*g*) = *g*>1.

Осталось посчитать, сколько степеней простых чисел, меньше 1000. Для 29=512, поэтому двойка дает 8 чисел, тройка – 5 чисел (36=729), пятерка – 3 числа (54=625), семерка – 2 числа (73 = 343), числа 11, 13, 17 и 19, 23, 29, 31 дают еще по одному ответу. Итого 25.

<u>Критерии.</u> Если всё верно, кроме подсчета количества степеней простых – 6 баллов. Примеры некоторых чисел, для которых не выполняется, с доказательством, что не выполняется – 1 балл. Доказательство, что для степеней простых всё хорошо – 3 балла.

7 класс, решения

Задача **1.** Натуральные числа от 1 до 9 расставлены в клетки таблицы 3×3 (по одному числу в каждую клетку). Число называется минимаксным, если оно наибольшее в своей строке и наименьшее в своем столбце. Можно ли составить таблицу, в которой нет минимаксных чисел?

1	2	8
3	7	6
4	5	9

Ответ: *да*. ***Решение.*** См. пример (примеров очень много).

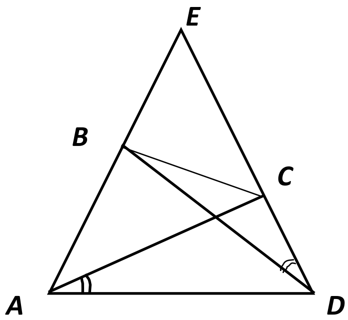
<u>Критерии.</u> Особых критериев нет.

Задача **2.** Трое первоклассниц Аня, Маня и Таня получили по стандартному набору цифр (в каждом наборе – десять цифр от 0 до 9, каждая – по одному разу). Каждая девочка потеряла часть цифр, но оказалось, что любые две девочки, объединившись, могут сложить из своих цифр любое двузначное число, не меньшее 50. Докажите, что втроем они смогут сложить любое трехзначное число, большее 500.

Решение. Так как девочки могут сложить числа 55, 66, 77, 88 и 99 на двоих, то у каждой из них могут быть потеряны только цифры от 0 до 4. При этом если у двоих потеряна одна и та же цифра x, то они не смогут сложить $\overline{5x}$. Значит, у них потеряны разные цифры. Изначально цифр 0, 1, 2, 3, 4 на всех троих было по три, значит, после потери на всех троих у них не менее двух экземпляров каждой цифры от 0 до 4 (и не менее трех экземпляров каждой цифры от 5 до 9). Значит, они могут сложить любое двухзначное число. Добавив в начало цифру от 5 до 9 (такая осталась), получим нужное трехзначное число.

<u>Критерии</u>. Доказательство, что у всех есть набор 5-9, стоит 2 балла (и столько же штраф за отсутствие). Аналогично для утверждения, что числа 0-4 есть в минимум в двух экземплярах. Если что-то сказано про набор, но не обосновано, почему из него можно собрать любое трехзначное большее 500 – не более 5 баллов.

Если сказано, что 5-9 встречаются 3 раза и 0-4 по 2 раза, а значит все трехзначные собираются (все без доказательств) – 1 балл.



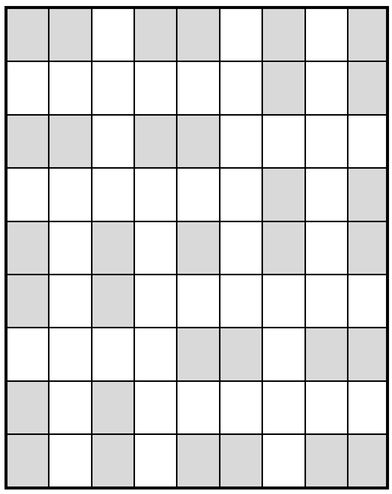
Задача **3.** Дан четырехугольник *ABCD*. Известно, что $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, а $\angle CAD = \angle CDB$. Докажите, что $AB+CD = AD$.

Решение. Продлим стороны *AB* и *CD* до пересечения в точке *E*. Так как $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, то мы получим равносторонний треугольник *AED*. Значит, $AD = DE$. Рассмотрим треугольники *CAD* и *BDE*. В них $\angle CAD = \angle BDE$ по условию, $AD = DE$, $\angle CDA = \angle BED = 60°$. Значит, они равны по первому признаку, откуда $BE = CD$. Но $AB+BE = AB+CD = AE = AD$.

<u>Критерии.</u> Продление сторон до равностороннего треугольника – 2 балла.

Задача **4.** Клетки квадрата 9×9 закрасили таким образом, чтобы у каждой клетки не более одной соседней с ней по стороне или диагонали. Какое наибольшее количество клеток можно нарисовать на доске?

Ответ: *33*. ***Решение.*** Узелков (пересечений линий) на доске всего 100. Разобьем соприкасающиеся клетки на пары. Все свободные тоже, возможно кроме одной (если их нечетное количество). Тогда у каждой пары возможно 6, 7 или 8 узелков. Тогда таких пар не более, чем 100:6= 16 (ост.4), то есть всего 32 клетки. И еще 4 узла, то есть не более одной клетки. Пример на 33 – см. рис.



<u>Критерии.</u> Оценка стоит 4 балла, пример стоит 3 балла. Если сказано, что две клетки занимают 6 узлов, но при этом остального нет – добавляется 3 балла.

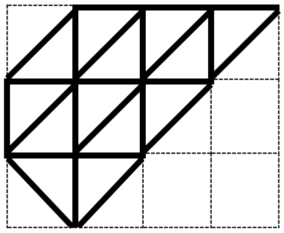
***Задача* 5.** Назовем делитель числа *n* собственным, если он не равен 1 и не равен самому числу *n*. Оказалось, что для некоторого четного числа *k* сумма двух наибольших собственных делителей не делится на сумму двух наименьших собственных делителей. Докажите, что число *k* делится на 4.

Решение. Заметим, что 2 – наименьший собственный делитель. Обозначим следующий по величине собственный делитель за *a*. Тогда два наибольших собственных делителя – это $\frac{k}{2}$ и $\frac{k}{a}$. Тогда $\frac{k}{2}+\frac{k}{a}=\frac{k(a+2)}{2a}$ не делится на *a*+2, что возможно только в том случае, если $\frac{k}{2a}$- нецелое число. Но заметим, что *k*= *ma*, так как *a* – делитель *k*. Значит, *m* – нечетное число, иначе *k* делилось бы на 2*a*. Но тогда *a* должно быть обязательно четным. Если среди простых делителей а есть нечетный множитель, то он тоже будет собственным делителем *n*, при этом он меньше *a* – противоречие. Значит, *a* – степень 2. Но тогда *a*=4, *k* делится на 4.

Пример - число 20. Два наименьших собственных делителя – это 2 и 4. Два наибольших – это 10 и 5. При этом 15 не делится на 6. Приводить пример для решения не обязательно.

Критерии. Особых критериев нет.

***Задача* 6.** Существует ли такой выпуклый пятиугольник, который можно разрезать на 13 равных треугольников? (Многоугольник называется выпуклым, если все его внутренние углы меньше 180^0.)



Ответ: *да, существует*. ***Решение.*** См.рис.

Критерии. Особых критериев нет