7 класс, высшая лига, 3 тур, 26 ноября

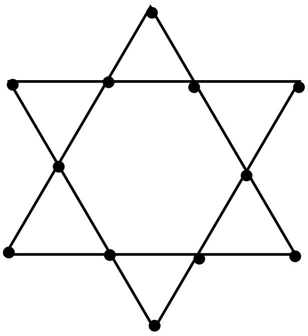
1. Треугольник *ABC* разрезали на несколько равносторонних треугольника. Обязательно ли треугольник *ABC* должен был быть равносторонним?

2. Расстоянием между вершинами правильного 18-угольника назовём число сторон, составляющих кратчайший путь по многоугольнику между этими вершинами (например, расстояние между соседними вершинами равно 1). Сколькими способами можно выбрать три вершины так, чтобы никакие две из них не находились на расстоянии 1, 8 или 9?

3. В квадрате 2017×2017 каждая клетка покрашена в синий или красный цвет. Клетка называется Г-главной, если в её горизонтали больше половины клеток покрашены в тот же цвет, что и она. Клетка называется В-главной, если в её вертикали больше половины клеток имеют тот же цвет, что и она. Докажите, что существует как минимум 2018 клеток, которые являются одновременно и Г-главными, и В-главными.

4. Докажите, что если дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ несократимы, и НОД(b,d)=1, то и их сумма $\frac{ad+bc}{bd}$ тоже несократима.

5. На доске написаны числа 2, 4, 6, 8, …2018. Играют двое. За один ход можно уменьшить на 1 любое из написанных чисел. Если получился ноль, то он стирается с доски. Если на доске получилось два совпадающих числа, что одно из них остается, а другое стирается. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре - тот, кто начинает или тот, кто ходит вторым?



6. В отмеченных на рисунке точках расположены натуральные числа от 1 до 12 (каждое – ровно один раз) так, чтобы суммы чисел вдоль каждой из шести прямых были равны. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел в шести «внешних» точках.

7. На полке стоит 666 книг по черной и белой магии, причем две книги по белой магии не могут стоять так, чтобы между ними было ровно 13 других книг. Какое наибольшее количество книг по белой магии может стоять на полке?

8. Пусть $A = 1!\cdot 2!\cdot 3!\ldots\cdot 10!$ и $B = 12!\cdot 13!\cdot 14!\cdot\ldots\cdot 20!$ Докажите, что $11AB$ – точный квадрат

9. Какое наименьшее количество четырехзначных чисел можно покрасить в красный цвет так, чтобы любое четырехзначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда тысяч до разряда единиц) совпадает хотя бы с одним красным числом хотя бы в одном разряде?

10. В кружок ходит 9 школьников, часть из которых враждует, а остальные – дружат. Учитель каждый месяц назначает старосту кружка, который моментально ссорится со всеми своими друзьями и начинает дружить со всеми врагами. Всегда ли учитель может действовать так, чтобы осталось не больше 18 пар врагов?

7 класс, первая лига, 3 тур, 26 ноября

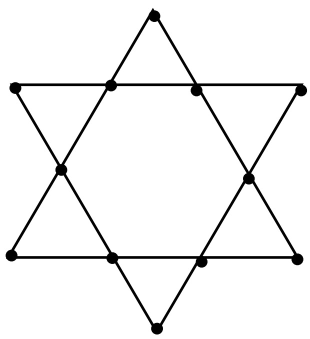
1. Треугольник *ABC* разрезали на четыре равносторонних треугольника. Обязательно ли треугольник *ABC* должен быть равносторонним?

2. В магазине «Супердешевка» действовали скидки – за покупку общей суммой более 1000 рублей на всю сумму, превышающую 1000, но не более 2000, действует скидка в 5%, но на ту часть, которая превышает 2000, действует уже скидка в 12%. Несколько товарищей решили для экономии купить однотипный товар вместе, и получилось, что при общей сумме в 3500 рублей (без скидки) каждый сэкономил 46 рублей. Сколько товарищей было в компании?

3. В квадрате 11×11 каждая клетка покрашена в синий или красный цвет. Клетка называется Г-главной, если в её горизонтали больше половины клеток покрашены в тот же цвет, что и она. Клетка называется В-главной, если в её вертикали больше половины клеток имеют тот же цвет, что и она. Докажите, что существует как минимум две клетки, которые являются одновременно и Г-главными, и В-главными.

4. Докажите, что если дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ несократимы, и НОД(*b*,*d*)=1, то и их сумма $\frac{ad+bc}{bd}$ тоже несократима.

5. На полке стоит 666 книг по черной и белой магии, причем две книги по белой магии не могут стоять так, чтобы между ними было ровно 13 других книг. Какое наибольшее количество книг по белой магии может стоять на полке?



6. В отмеченных на рисунке точках расположены натуральные числа от 1 до 12 (каждое – ровно один раз) так, чтобы суммы чисел вдоль каждой из шести прямых были равны. Докажите, что сумма трех чисел в вершинах одного «большого» треугольника равна сумме трех чисел в вершинах другого «большого» треугольника.

7. Известно, что для положительных чисел b и с выполняется неравенство $b+\frac{1}{c}>c+\frac{1}{b}$. Найдите, какое из чисел *b* и *c* больше.

8. Каждую грань кубика разделили на 4 одинаковых квадратика. Каждый из этих квадратиков покрасили в некий цвет так, чтобы никакие два квадратика, имеющие общую сторону (даже в разных гранях) не были окрашены одинаково. Какое наибольшее число квадратиков может быть окрашено в один и тот же цвет?

9. Какое наименьшее количество пятизначных чисел можно покрасить в красный цвет так, чтобы любое пятизначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда десятков тысяч до разряда единиц) совпадает хотя бы с одним красным числом хотя бы в одном разряде?

10. У каждого из *N* детей было по *N* конфеты. Каждую минуту один из детей платит в кассу столько рублей, у скольких детей конфет не меньше, чем у него, а затем съедает одну конфету. Сколько денег может оказаться в кассе, когда все конфеты будут съедены?

7 класс, вторая лига, 3 тур, 26 ноября

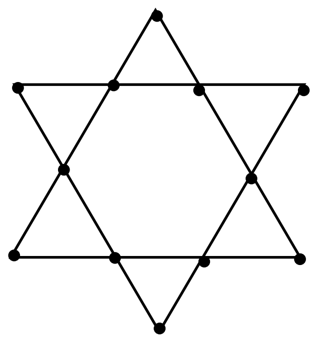
1. Существует ли треугольник *ABC*, который можно разрезать на три равносторонних треугольника?

2. В записи семизначного числа нет одинаковых цифр, при этом оно делится нацело на каждую из своих цифр. Какие цифры отсутствуют в данном числе?

3. На полке стоят книги по черной и белой магии, причем две книги по белой магии не могут стоять так, чтобы между ними было ровно 13 других книг, а никакие две книги по черной магии не могут стоять рядом. Какое наибольшее количество книг может стоять на полке?

4. Троечник складывает дроби, прибавляя числитель к числителю, а знаменатель к знаменателю. Однажды он сложил две правильные несократимые дроби и получил ответ, который ровно в 2 раза меньше правильного. Какие дроби складывал Дима, если известно, что они различны и одна из них равна 1/6?

5. На острове живут 100 рыцарей и лжецов, все - в четырехэтажных домах. На вопрос "Вы живете на первом этаже?" ответили "да" 40 жителей. На аналогичный вопрос про второй этаж утвердительно ответили 30, про третий – 50, а про четвертый – 0. Сколько жителей острова действительно живет на первом этаже?



6. Расположите число в отмеченных на рисунке точках расположены натуральные числа от 1 до 12 (каждое – ровно один раз) так, чтобы суммы чисел вдоль каждой из шести прямых были равны.

7. Один покупатель купил несколько товаров в магазине «Всё за 36 рублей», а второй — в магазине «Всё за 47 рублей». Первый покупатель потратил меньше рублей, но купил больше товаров. Докажите, что вместе они купили не менее 9 товаров.

8. Каждую грань кубика разделили на 4 одинаковых квадратика. Каждый из этих квадратиков покрасили в некий цвет так, чтобы никакие два квадратика, имеющие общую сторону (даже в разных гранях) не были окрашены одинаково. Какое наименьшее количество цветов может быть использовано?

9. Найдите два таких четырехзначных числа *N* и *M*, что любое четырехзначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда десятков тысяч до разряда единиц) совпадает *с N* или с *M* хотя бы в одном разряде.

10. На грани каждого из трех кубиков написана буква Аня бросает сразу три кубика и читает слово, которое выпало на верхних гранях. У неё получались следующие слова OSA, VIA, OCA, ESA, SOL, GOL, FIA, REY, SUR, MIA, PIO, ATE, FIN, VID. Найдите набор букв, который записан на каждом кубике.

7 класс, третья лига, 3 тур, 26 ноября

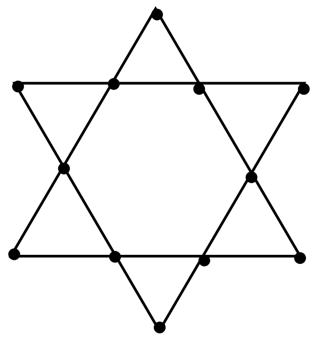
1. Существует ли треугольник *ABC*, который можно разрезать на три равносторонних треугольника?

2. Один покупатель купил несколько товаров в магазине «Всё за 36 рублей», а второй — в магазине «Всё за 47 рублей». Первый покупатель потратил меньше рублей, но купил больше товаров. Докажите, что первый покупатель купил не меньше 5 товаров.

3. На полке стоят книги по черной и белой магии, причем две книги по белой магии не могут стоять так, чтобы между ними было ровно 13 других книг, а никакие две книги по черной магии не могут стоять рядом. Докажите, что на полке меньше 2017 книг.

4. В ряд выстроилось 2017 лжецов и рыцарей. Каждый из них сказал: «Слева от меня лжецов ровно на 2 больше, чем справа». Сколько всего лжецов в строю?

5. На острове живут 100 рыцарей и лжецов, все - в четырехэтажных домах. На вопрос "Вы живете на первом этаже?" ответили "да" 40 жителей. На аналогичный вопрос про второй этаж утвердительно ответили 30, про третий – 50, а про четвертый – 0. Сколько жителей острова действительно живет на первом этаже?



6. Расположите число в отмеченных на рисунке точках расположены натуральные числа от 1 до 12 (каждое – ровно один раз) так, чтобы суммы чисел вдоль каждого из шести отрезков были равны.

7. Сумма трех последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

8. Каждую грань кубика разделили на 4 одинаковых квадратика. Каждый из этих квадратиков покрасили в некий цвет так, чтобы никакие два квадратика, имеющие общую сторону (даже в разных гранях) не были окрашены одинаково. Может ли в такой раскраске быть 9 красных квадратов?

9. Найдите такое пятизначное число *N*, что любое пятизначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда десятков тысяч до разряда единиц) совпадает *с N* хотя бы в одном разряде.

10. На праздник пришло несколько детей, часть из них с мамами. Всего на празднике было 30 человек. Оказалось, что детей, которые пришли без мам, на 10 больше, чем остальных детей. Сколько мам пришло на праздник?

8 класс, высшая лига, 3 тур, 26 ноября

1. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ были параллельны прямым AB, BC и CA. Найдите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC.

2. Расстоянием между вершинами правильного 18-угольника назовём число сторон, составляющих кратчайший путь по многоугольнику между этими вершинами (например, расстояние между соседними вершинами равно 1). Сколькими способами можно выбрать три вершины так, чтобы никакие две из них не находились на расстоянии 1, 8 или 9?

3. В квадрате 2017×2017 каждая клетка покрашена в синий или красный цвет. Клетка называется Г-главной, если в её горизонтали больше половины клеток покрашены в тот же цвет, что и она. Клетка называется В-главной, если в её вертикали больше половины клеток имеют тот же цвет, что и она. Докажите, что существует как минимум 2018 клеток, которые являются одновременно и Г-главными, и В-главными.

4. Найдите все такие тройки действительных чисел (x, y, z), что $x+2y=4$ и $2xy-3z^2=4$.

5. На доске написаны числа 2, 4, 6, 8, …2018. Играют двое. За один ход можно уменьшить на 1 любое из написанных чисел. Если получился ноль, то он стирается с доски. Если на доске получилось два совпадающих числа, что одно из них остается, а другое стирается. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре - тот, кто начинает или тот, кто ходит вторым?

6. На гипотенузе AB данного прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D таким образом, что $AB = 2CD$. Оказалось, что $\angle ACD = 27^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

7. Пусть $A = 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 1008!$ и $B = 1010!\cdot 1011!\cdot 1012!\cdot\ldots\cdot 2018!$ Докажите, что $2AB$ – точный квадрат.

8. В прямоугольнике 100×100 клеток отмечены 3900 центров клеток. Докажите, что какие-то четыре из них лежат на одной окружности.

9. Какое наименьшее количество четырехзначных чисел можно покрасить в красный цвет так, чтобы любое четырехзначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда тысяч до разряда единиц) совпадает хотя бы с одним красным числом хотя бы в одном разряде?

10. В кружок ходит 9 школьников, часть из которых враждует, а остальные – дружат. Учитель каждый месяц назначает старосту кружка, который моментально ссорится со всеми своими друзьями и начинает дружить со всеми врагами. Всегда ли учитель может действовать так, чтобы осталось не больше 16 пар врагов?

8 класс, первая лига, 3 тур, 26 ноября

1. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ были параллельны прямым AB, BC и CA. Найдите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC.

2. Расстоянием между вершинами правильного 18-угольника назовём число сторон, составляющих кратчайший путь по многоугольнику между этими вершинами (например, расстояние между соседними вершинами равно 1). Сколькими способами можно выбрать три вершины так, чтобы никакие две из них не находились на расстоянии 1, 8 или 9?

3. В квадрате 2017×2017 каждая клетка покрашена в синий или красный цвет. Клетка называется Г-главной, если в её горизонтали больше половины клеток покрашены в тот же цвет, что и она. Клетка называется В-главной, если в её вертикали больше половины клеток имеют тот же цвет, что и она. Докажите, что существует клетка, которая являются одновременно и Г-главной, и В-главной.

4. Найдите все такие пары действительных чисел (y, z), что $8y–4y^2–3z^2=4$.

5. На полке стоит 666 книг по черной и белой магии, причем две книги по белой магии не могут стоять так, чтобы между ними было ровно 13 других книг. Какое наибольшее количество книг по белой магии может стоять на полке?

6. На гипотенузе AB данного прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D таким образом, что $AB = 2CD$. Оказалось, что $\angle ACD = 27°$. Найдите углы треугольника ABC.

7. Известно, что числа b, c >1 и выполняется неравенство $b+\frac{1}{c}+\frac{c}{b} > c+\frac{1}{b}+\frac{b}{c}$. Докажите, что $b>c$.

8. Каждую грань кубика разделили на 4 одинаковых квадратика. Каждый из этих квадратиков покрасили в некий цвет так, чтобы никакие два квадратика, имеющие общую сторону (даже в разных гранях) не были окрашены одинаково. Какое наибольшее число квадратиков может быть окрашено в один и тот же цвет?

9. Какое наименьшее количество пятизначных чисел можно покрасить в красный цвет так, чтобы любое пятизначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда десятков тысяч до разряда единиц) совпадает хотя бы с одним красным числом хотя бы в одном разряде?

10. Коля отметил зеленым цветом на плоскости 5 точек с целыми координатами, причем никакие три не лежат на одной прямой. Вася провел красным цветом все возможные отрезки с концами в зеленых точках (зеленые точки не перекрашиваются). Докажите, что хотя бы одна красная точка имеет обе целые координаты.

8 класс, вторая лига, 3 тур, 26 ноября

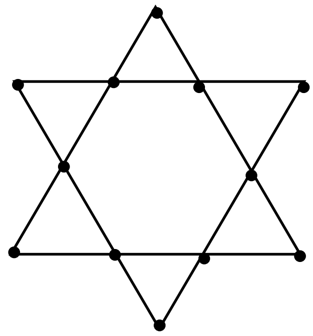
1. Треугольник *ABC* разрезали на несколько равносторонних треугольника. Обязательно ли треугольник *ABC* должен был быть равносторонним?

2. На полке стоят книги по черной и белой магии, причем две книги по белой магии не могут стоять так, чтобы между ними было ровно 13 других книг, а никакие две книги по черной магии не могут стоять рядом. Какое наибольшее количество книг может стоять на полке?

3. Докажите, что если дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ несократимы, и НОД(b, d)=1, то и их сумма $\frac{ad+bc}{bd}$ тоже несократима.

4. Найдите все такие пары действительных чисел (y, z), что $8y–4y^2–3z^2=4$.

5. В отмеченных на рисунке точках расположены натуральные числа от 1 до 12 (каждое – ровно один раз) так, чтобы суммы чисел вдоль каждой из шести прямых были равны. Докажите, что сумма трех чисел в вершинах одного треугольника равна сумме трех чисел в вершинах другого треугольника.



6. Дан треугольник *ABC*. Найдите, где могут лежать точки *M*, для которых расстояние *CM* меньше хотя бы одного из расстояний *AM* и *BM*.

7. Известно, что числа b, c >1 и выполняется неравенство $b+\frac{1}{c}+\frac{c}{b}>c+\frac{1}{b}+\frac{b}{c}$. Докажите, что $b>c$.

8. Каждую грань кубика разделили на 4 одинаковых квадратика. Каждый из этих квадратиков покрасили в некий цвет так, чтобы никакие два квадратика, имеющие общую сторону (даже в разных гранях) не были окрашены одинаково. Какое наибольшее число квадратиков может быть окрашено в один и тот же цвет?

9. Найдите два таких четырехзначных числа *N* и *M*, что любое четырехзначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда десятков тысяч до разряда единиц) совпадает *с N* или с *M* хотя бы в одном разряде.

10. В магазине «Супердешевка» действовали скидки - за покупку общей суммой более 1000 рублей на всю сумму, превышающую 1000, но не более 2000, действует скидка в 5%, но на ту часть, которая превышает 2000 действует уже скидка в 12%. Несколько товарищей решили для экономии купить однотипный товар вместе, и получилось, что при общей сумме в 3500 рублей (без скидки) каждый сэкономил 46 рублей. Сколько товарищей было в компании?

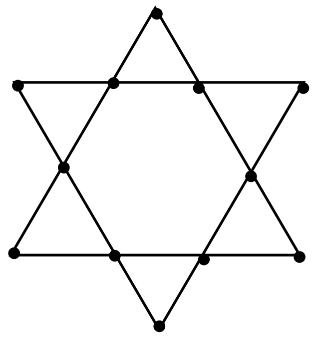
8 класс, третья лига, 3 тур, 26 ноября

1. Треугольник *ABC* разрезали на четыре равносторонних треугольника. Обязательно ли треугольник *ABC* должен быть равносторонним?

2. На полке стоят книги по черной и белой магии, причем две книги по белой магии не могут стоять так, чтобы между ними было ровно 13 других книг, а никакие две книги по черной магии не могут стоять рядом. Какое наибольшее количество книг может стоять на полке?

3. Докажите, что если дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ несократимы, и НОД(*b*, *d*)=1, то и их сумма $\frac{ad+bc}{bd}$ тоже несократима.

4. Расположите число в отмеченных на рисунке точках расположены натуральные числа от 1 до 12 (каждое – ровно один раз) так, чтобы суммы чисел вдоль каждой из шести прямых были равны.



5. На праздник пришло несколько детей, часть из них с мамами. Всего на празднике было 30 человек. Оказалось, что детей, которые пришли без мам, на 10 больше, чем остальных детей. Сколько мам пришло на праздник?

6. Дан треугольник *ABC*. Найдите, где могут лежать точки *M*, для которых расстояние *CM* меньше и расстояния *AM*, и расстояния *BM*.

7. Один покупатель купил несколько товаров в магазине «Всё за 36 рублей», а второй — в магазине «Всё за 47 рублей». Первый покупатель потратил меньше рублей, но купил больше товаров. Докажите, что вместе они купили не менее 9 товаров.

8. Каждую грань кубика разделили на 4 одинаковых квадратика. Каждый из этих квадратиков покрасили в некий цвет так, чтобы никакие два квадратика, имеющие общую сторону (даже в разных гранях) не были окрашены одинаково. Докажите, что трех цветов хватит для подобной раскраски.

9. Найдите такое пятизначное число *N*, что любое пятизначное число, цифры которого идут в порядке возрастания (от разряда десятков тысяч до разряда единиц) совпадает *с* *N* хотя бы в одном разряде.

10. На грани каждого из трех кубиков написана буква Аня бросает сразу три кубика и читает слово, которое выпало на верхних гранях. У неё получались следующие слова OSA, VIA, OCA, ESA, SOL, GOL, FIA, REY, SUR, MIA, PIO, ATE, FIN, VID. Найдите набор букв, который записан на каждом кубике