7 класс, высшая лига, 2 тур, 25 ноября

1. Два игрока поочередно в квадрат 2017×2017 ставят по одной фишке в свободные клетки, при этом должно выполняться условие - в каждой строке и каждом столбце не может стоять более двух фишек. Кто не может сделать ход - проигрывает. Кто имеет выигрышную стратегию при правильной игре?

2. Докажите, что для натуральных чисел n, m, где $m>n$, число 4^m-4^n делится на 9 тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 3.

3. Назовем трехэлементное множество натуральных чисел троично-хорошим, если для него верны сразу два условия: (1) оно содержит какие-то два последовательные числа и (2) оно содержит какие-то два числа, отличающиеся ровно в три раза. Сколько троично-хороших подмножеств в множестве натуральных чисел от 1 до 2017?

4. Известно, что число n можно представить в виде суммы 18 его делителей и в виде суммы 19 его делителей (при этом каждый делитель можно взять несколько раз, например, 15=5+3+3+1+1+1+1). Докажите, что n можно представить и в виде суммы 20 его делителей.

5. Назовем число n чудным, если оно делится на 9, кроме того, в его записи есть все 10 цифр, при этом если цифра a меньше цифры b, то она встречается в этом числе меньшее количество раз. Найдите наименьшее чудное число.

6. Точки A, B, C, D лежат на прямой в указанном порядке. Точка E такова, что $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 45^\circ$. Точки E и F – середины отрезков AC и BD. Найдите величину угла $\angle FE$G.

7. В треугольнике ABC $\angle BAC = 60^\circ$. Точки M, N, K выбраны на сторонах BC, AC и AB соответственно так, что $BK = KM = MN = NC$. Известно, что $AN = 2AK$. Найдите углы треугольника ABC.

8. На плоскости отмечены $k\geq 2$ точек с целочисленными координатами. Для каждой пары отмеченных точек все точки, делящие этот отрезок на 5 равных частей, красят в синий цвет. При каком наименьшем k среди синих точек гарантированно найдется точка с целыми координатами?

9. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки. Петя купил два одинаковых таких набора, но первый — из синих палочек, а второй — из красных. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из купленных наборов? Треугольники считаются разными, если их нельзя совместить так, чтобы совпали и стороны, и их цвета.

10. В некоторый момент в Москве до полудня оставалось вчетверо меньше времени, чем в Куа. А через четыре с половиной часа уже в Куа до полудня оставалось вчетверо меньше времени, чем в Москве. Определите разницу во времени между Куа и Москвой.

7 класс, первая лига, 2 тур, 25 ноября

1. В колоде из 36 карт находится по 9 карт каждой масти. Гриша загадывает масть и записывает ее на бумажке, а Миша вытаскивает карту и сверяет её масть с записанной. Если Гриша угадывает, то получает 100 рублей. Вытянутая карта больше в колоду не возвращается. Дальше Гриша загадывает снова (ту же масть или меняет её), и так до конца. Какую наибольшую сумму может гарантировать себе Гриша (он не надеется на удачу)?

2. Маша посчитала сумму цифр трехзначного числа. После этого она увеличила загаданное изначально число в несколько раз и снова посчитала сумму цифр. Она оказалась прежней. Тогда она снова увеличила число во столько же раз, и опять сумма цифр не поменялась. И так далее. Могла ли Маша увеличивать число ровно 7 раз без изменения суммы цифр?

3. На прямой отмечено 100 точек (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО на равных расстояниях). Для каждой точки посчитали сумму расстояний от этой точки до всех остальных. Могут ли полученные 100 значений быть попарно различными? (попарно различные – это когда никакие два значения не повторяются).

4. У эксперта есть гирьки весом 1, 2, 3, 5 и 10 грамм. Ему известно, что то ли одна, то ли две из этих гирь испорчены и весят больше, чем на них написано, но неизвестно, насколько больше (если испорчены две, то их вес может отличаться от написанного на разные величины). Всегда ли эксперт сможет узнать, сколько именно гирь испорчено? Количество взвешиваний на чашечных весах неограниченно.

5. Назовем клетчатую фигуру связной, если она состоит из целых клеток и из любой клетки можно добраться в любую другую, переходя через стороны клеток. Маша говорит, что если в квадрате 10×10 в черный цвет закрашено хотя бы 52 клетки, то она, не видя раскраски, может гарантировать, что там есть связная черная фигура из n клеток. Чему равно n?

6. Назовем число n чудным, если оно делится на 9, кроме того, в его записи есть хотя бы пять разных цифр, при этом если цифра a меньше цифры b, то она встречается в этом числе меньшее количество раз. Найдите наименьшее чудное число.

7. Точка E — середина стороны CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, где $AD = BC$. Докажите, что $AE+CD > BE$.

8. Найдите значение выражения $\frac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+2017\cdot2018}{1^2+3^2+5^2\ldots+2017^2}$

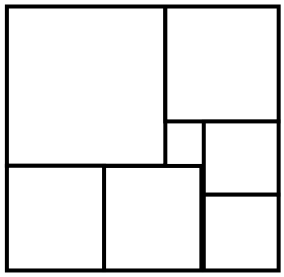
9. Сколько существует таких троек действительных чисел (a, b, c), что среди шести числе a, b, c, $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{c}$, $\frac{c^2}{a}$ ровно три различных?

10. Бригада состоит из нескольких работников и бригадира. Все работники получают поровну, по 5000 рублей в месяц, а бригадир получает на 2017 рублей больше, чем средний заработок по бригаде (включая бригадира). Сколько зарабатывает бригадир?

X Ижевский Командный Турнир Математиков, 24-26 ноября 2017

7 класс, вторая лига, 2 тур, 25 ноября

1. Прямоугольник разрезали на квадратики, как показано на рисунке. Найдите большую сторону прямоугольника, если меньшая сторона равна 18.



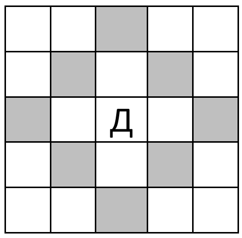
2. Маша посчитала сумму цифр трехзначного числа. После этого она умножила загаданное трехзначное число на 3 и снова посчитала сумму цифр. Она не изменилась. Тогда она снова увеличила число в 3 раза, и опять сумма цифр не поменялась. Могла ли Маша проделать эту операцию 7 раз без изменения суммы цифр?

3. На прямой отмечено 100 точек (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО на равных расстояниях). Для каждой точки посчитали сумму расстояний от этой точки до всех остальных. Могут ли полученные 100 значений быть попарно различными? (попарно различные – это когда никакие два значения не повторяются).

4. Гриша и Миша ели ягодки. Сначала Гриша съел одну, затем Миша – две, потом Гриша три, Миша четыре и так далее. Когда какому-то из мальчиков на очередной ход не хватает ягод, он доедает все оставшиеся и процесс заканчивается. Известно, что Григорий съел 101 ягоду. Сколько досталось Михаилу?

5. В квадрате 10×10 51 клетка закрашена в черный цвет. Всегда ли из него можно вырезать связную черную фигуру из трех клеток? (связная фигура – фигура, в которой из любой клетки можно добраться до любой другой, переходя через стороны клеток).

6. Назовем число *n* чудным, если в его записи есть все 10 цифр, при этом если цифра *a* меньше цифры *b*, то она встречается в этом числе меньшее количество раз. Найдите наименьшее чудное число.



7. Фигура «дубль» ходит следующим образом: с клетки, на которой она стоит, она переходит через сторону клетки, потом еще через одну сторону и останавливается. Таким образом, с клетки Д за один ход «дубль» может попасть на любую из серых клеток и никуда больше. Может ли дубль, начав с любой клетки, обойти всю доску 8×8?

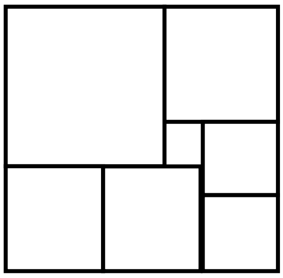
8. Точка E — середина стороны CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, где $AD = BC$. Докажите, что $AE+CD > BE$.

9. Найдите значение выражения $\frac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+2017\cdot2018}{1^2+3^2+5^2\ldots+2017^2}$

10. Бригада состоит из нескольких работников и бригадира. Все работники получают поровну, по 50 рублей в час, а бригадир получает на 17 рублей больше, чем средний заработок по бригаде (включая бригадира). Все получают целое количество рублей в час. Может ли бригада состоять из пяти работников?

7 класс, третья лига, 2 тур, 25 ноября

1. Прямоугольник разрезали на квадратики, как показано на рисунке. Найдите большую сторону прямоугольника, если меньшая сторона равна 18.



2. Маша посчитала сумму цифр трехзначного числа. После этого она умножила загаданное трехзначное число на 3 и снова посчитала сумму цифр. Она не изменилась. Тогда она снова увеличила число в 3 раза, и опять сумма цифр не поменялась. Могла ли Маша проделать эту операцию 5 раз без изменения суммы цифр?

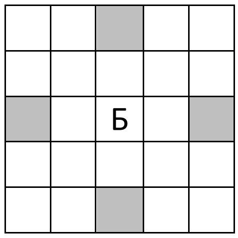
3. Назовем многоугольник клетчатым, если его стороны идут по линиям сетки. На какое наибольшее количество клетчатых 8-угольников можно разрезать квадрат 8×8?

4. Гриша и Миша ели ягодки. Сначала Гриша съел одну, затем Миша – две, потом Гриша три, Миша четыре и так далее. Когда какому-то из мальчиков на очередной ход не хватает ягод, он доедает все оставшиеся и процесс заканчивается. Известно, что Григорий съел 101 ягоду. Сколько досталось Михаилу?

5. У эксперта есть гирьки весом 1, 2, 3, 5 и 10 грамм. Ему известно, что ровно одна из этих гирь испорчена, то есть весит не столько грамм, сколько на ней написано, но неизвестно, легче она, тяжелее и на сколько. Докажите, что эксперт может найти испорченную гирьку за 3 взвешивания на чашечных весах.

6. Назовем число *n* чудным, если в его записи есть хотя бы пять разных цифр, при этом если цифра *a* меньше цифры *b*, то она встречается в этом числе меньшее количество раз. Найдите наименьшее чудное число.

7. Фигура «бис» ходит на две клетки по прямой (т.е. клетки Б за один ход «бис» может попасть на любую из серых клеток и никуда больше). Может ли «бис», начав с любой клетки, обойти всю доску 8×8?



8. Серёжа заменил в верном числовом примере цифры буквами (одинаковые — одинаковыми, а разные — разными) так, что получилось равенство $\overline{AX}+\overline{AX}+\cdots+\overline{AX}=\overline{AAX}$. Может ли в правой части быть 11 слагаемых?

9. Федор Конюхов прибыл остров рыцарей и лжецов и обнаружил, что кроме них на острове появились середняки – они чередуют правдивые и ложные высказывания, при этом неизвестно, с какого из них начинают. Федор встретил троих жителей острова (А, Б и В) и спросил у каждого, кто двое оставшихся. Он получил следующие ответы:
А: «Б – середняк». «В – рыцарь». Б: «А – лжец». «В – лжец». В: «А – лжец». «Б – лжец».
Можно ли по этим ответам определить, кто из них кто?

10. Бригада состоит из 17 работников и бригадира. Все работники получают поровну, по 50 рублей в час, а бригадир получает на 17 рублей больше, чем средний заработок по бригаде (включая бригадира). Все получают целое количество рублей в час. Сколько получает бригадир?

8 класс, высшая лига, 2 тур, 25 ноября

1. Натуральные числа n и m таковы, что удовлетворяют равенству $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\right\} = \left\{\sqrt{m}\right\}$ (здесь $\{k\}$ – дробная часть числа k, то есть $\{k\}= k–[k]$, где $[k]$– наибольшее целое число, не превосходящее k). Докажите, что $4m+1$ – квадрат целого числа.

2. Докажите, что для натуральных чисел n, m, где $m>n$, число $4^m–4^n$ делится на 9 тогда и только тогда, когда $m–n$ делится на 3.

3. Назовем трехэлементное множество натуральных чисел троично-хорошим, если для него верны сразу два условия: (1) оно содержит какие-то два последовательные числа и (2) оно содержит какие-то два числа, отличающиеся в три раза. Сколько троично-хороших подмножеств в множестве натуральных чисел от 1 до 2017?

4. Известно, что число n можно представить в виде суммы 18 его делителей и в виде суммы 19 его делителей (при этом каждый делитель можно взять несколько раз, например, 15=5+3+3+1+1+1+1). Докажите, что n можно представить и в виде суммы 20 делителей.

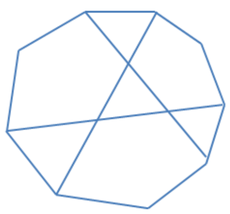
5. Дан треугольник ABC. На прямой AC выбрана точка D так, что A лежит между D и C, $AD = BC$. Докажите, что пересечение серединного перпендикуляра к отрезку BD с внешней биссектрисой угла C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC.

6. Известно, что для некоторого натурального n числа 5^n и 2^n начинаются на одну и ту же цифру. Найдите эту цифру.

7. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Может ли оказаться, что лучи AN и AM делят $\angle BAD$ на три равные части?

8. Два игрока поочередно в квадрат 2017×2017 ставят по одной фишке в свободные клетки, при этом должно выполняться условие - в каждой строке и каждом столбце не может стоять более двух фишек. Кто не может сделать ход - проигрывает. Кто выигрышную стратегию при правильной игре?

9. В каждую клетку квадрата 100×100 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём **расстоянием** между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d \leq 10$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?



10. Папа подарил дочке на день рождения граф. Дочка оторвала от графа одну вершину вместе с выходящими из неё рёбрами, а то, что осталось, аккуратно разложила на столе и зарисовала. У неё получился рисунок, изображённый справа (цикл из 9 вершин и ещё 3 ребра; пересечения трёх рёбер внутри цикла вершинами графа не являются). Затем она вернула оторванную вершину, и оторвала другую. Такие действия она проделала с четырьмя вершинами и каждый раз получала одинаковые рисунки. Какой граф был подарен?

8 класс, первая лига, 2 тур, 25 ноября

1. Известно, что уравнение $ax+\frac{c}{x}=b$ с ненулевыми коэффициентами имеет решение. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $ax+\frac{c}{x}=b+1$ и $ax+\frac{c}{x}=b-1$ тоже имеет решение.

2. Докажите, что для натуральных чисел n, m, где $m>n$, число $4^m–4^n$ делится на 9 тогда и только тогда, когда $m–n$ делится на 3.

3. У эксперта есть гирьки весом 1, 2, 3, 5 и 10 грамм. Ему известно, что то ли одна, то ли две из этих гирь испорчены и весят больше, чем на них написано, но неизвестно, насколько больше (если испорчены две, то их вес может отличаться от написанного на разные величины). Всегда ли эксперт сможет узнать, сколько именно гирь испорчено? Количество взвешиваний на чашечных весах неограниченно.

4. Сколько существует таких троек действительных чисел (a, b, c), что среди шести числе a, b, c, $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{c}$, $\frac{c^2}{a}$ ровно три различных?

5. Дан треугольник ABC. На прямой AC выбрана точка D так, что A лежит между D и C, $AD = BC$. Докажите, что пересечение серединного перпендикуляра к отрезку BD с внешней биссектрисой угла C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC.

6. Назовем клетчатую фигуру связной, если она состоит из целых клеток и из любой клетки можно добраться в любую другую, переходя через стороны клеток. Маша говорит, что если в квадрате 10×10 в черный цвет закрашено хотя бы 52 клетки, то она, не видя раскраски, может гарантировать, что там есть связная черная фигура из n клеток. Чему равно n?

7. В треугольнике ABC $\angle BAC = 60°$. Точки M, N, K выбраны на сторонах BC, AC и AB соответственно так, что $BK = KM = MN = NC$. Известно, что $AN = 2AK$. Найдите углы треугольника ABC.

8. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Может ли оказаться, что лучи AN и AM делят $\angle BAD$ на три равные части?

9. Бригада состоит из нескольких работников и бригадира. Все работники получают поровну, по 5000 рублей в месяц, а бригадир получает на 2017 рублей больше, чем средний заработок по бригаде (включая бригадира). Сколько зарабатывает бригадир?

10. В некоторый момент в Москве до полудня оставалось вчетверо меньше времени, чем в Куа. А через четыре с половиной часа уже в Куа до полудня оставалось вчетверо меньше времени, чем в Москве. Определите разницу во времени между Куа и Москвой.

8 класс, вторая лига, 2 тур, 25 ноября

1. Известно, что уравнение $ax^2+bx+c = 0$ с ненулевыми коэффициентами имеет решение. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $ax^2+bx+c = x$ и $ax^2+bx+c = -x$ тоже имеет решение.

2. Маша посчитала сумму цифр трехзначного числа. После этого она увеличила загаданное изначально число в несколько раз и снова посчитала сумму цифр. Она оказалась прежней. Тогда она снова увеличила число во столько же раз, и опять сумма цифр не поменялась. И так далее. Могла ли Маша увеличивать число ровно 7 раз без изменения суммы цифр?

3. Учитель на доске написала выражение x^2+4x. Ваня подставил в это выражение натуральное число n, а Гриша – натуральное число m. Может ли разность Ваниного и Гришиного числа быть равна 2018?

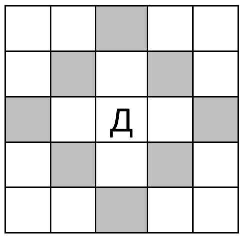
4. На прямой отмечено 100 точек (НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО на равных расстояниях). Для каждой точки посчитали сумму расстояний от этой точки до всех остальных. Могут ли полученные 100 значений быть попарно различными? (попарно различные – это когда никакие два значения не повторяются).

5. У эксперта есть гирьки весом 1, 2, 3, 5 и 10 грамм. Ему известно, что то ли одна, то ли две из этих гирь испорчены и весят больше, чем на них написано, но неизвестно, насколько больше (если испорчены две, то их вес может отличаться от написанного на разные величины). Всегда ли эксперт сможет узнать, сколько именно гирь испорчено? Количество взвешиваний на чашечных весах неограниченно.

6. В квадрате 10×10 51 клетка закрашена в черный цвет. Всегда ли из него можно вырезать связную черную фигуру из трех клеток? (связная фигура – фигура, в которой из любой клетки можно добраться до любой другой, переходя через стороны клеток).

7. Назовем число n чудным, если оно делится на 9, кроме того, в его записи есть все 10 цифр, при этом если цифра a меньше цифры b, то она встречается в этом числе меньшее количество раз. Найдите наименьшее чудное число.

8. Фигура «дубль» ходит следующим образом: с клетки, на которой она стоит, она переходит через сторону клетки, потом еще через одну сторону и останавливается. Таким образом, с клетки Д за один ход «дубль» может попасть на любую из серых клеток и никуда больше. Может ли дубль, начав с любой клетки, обойти всю доску 8×8?



9. Точка E — середина стороны CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, где $AD = BC$. Докажите, что $AE+CD > BE$.

10. Точки A, B, C, D лежат на прямой в указанном порядке. Точка E такова, что $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 45°$. Точки E и F – середины отрезков AC и BD. Найдите величину угла $\angle FEG$.

8 класс, третья лига, 2 тур, 25 ноября

1. Известно, что уравнение $x^2+bx+1 = 0$ с ненулевыми коэффициентами имеет решение. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $x^2+bx+1 = x$ и $x^2+bx+1 = -x$ тоже имеет решение.

2. Маша посчитала сумму цифр трехзначного числа. После этого она умножила загаданное трехзначное число на 3 и снова посчитала сумму цифр. Она не изменилась. Тогда она снова увеличила число в 3 раза, и опять сумма цифр не поменялась. Могла ли Маша проделать эту операцию ровно 7 раз без изменения суммы цифр?

3. Ваня и Гриша загадали каждый своё натуральное число, причем каждое из загаданных чисел – точный квадрат. Может ли разность их чисел быть равна 102?

4. Гриша и Миша ели ягодки. Сначала Гриша съел одну, затем Миша – две, потом Гриша три, Миша четыре и так далее. Когда какому-то из мальчиков на очередной ход не хватает ягод, он доедает все оставшиеся и процесс заканчивается. Известно, что Григорий съел 101 ягоду. Сколько досталось Михаилу?

5. У эксперта есть гирьки весом 1, 2, 3, 5 и 10 грамм. Ему известно, что ровно одна из этих гирь испорчена, то есть весит не столько грамм, сколько на ней написано, но неизвестно, легче она, тяжелее и на сколько. Докажите, что эксперт может найти испорченную гирьку за 3 взвешивания на чашечных весах.

6. Назовем клетчатую фигуру связной, если она состоит из целых клеток и из любой клетки можно добраться в любую другую, переходя через стороны клеток. Известно, что в квадрате 10×10 в черный цвет закрашено хотя бы 52 клетки. Можно ли утверждать, что из него можно вырезать связную черную фигуру из 4 клеток?

7. Назовем число n чудным, если оно делится на 9, кроме того, в его записи есть хотя бы пять разных цифр, при этом если цифра a меньше цифры b, то она встречается в этом числе меньшее количество раз. Найдите наименьшее чудное число.

8. Точки A, B, C, D лежат на прямой в указанном порядке. Точка E такова, что $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 45°$. Точки E и F – середины отрезков AC и BD. Найдите величину угла $\angle FEG$.

9. Точка E — середина стороны CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, где $AD = BC$. Докажите, что $AE+CD > BE$.

10. Найдите значение выражения $\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+2017\cdot 2018}{1^2+3^2+5^2\ldots+2017^2}$