7 класс, высшая лига, 1 тур, 24 ноября 2017

1. Олимпиада по математике проходила два дня, причем в оба дня школьникам давалось по 5 задач. Оказалось, что для каждого участника количество задач, решенных в первый день, на 1 отличается от количества задач, решенных им во второй день. Кроме того, для каждой задачи второго дня количество участников, решивших её, на 2 отличается от количества участников, решивших задачу с тем же номером в первый день. Докажите, что в олимпиаде приняло участие четное количество школьников.

2. Существуют ли такие выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$, что вершины K, L, M, N лежат на сторонах $ABCD$ (по одной на каждой стороне), при этом сумма диагоналей четырехугольника $ABCD$ меньше суммы диагоналей четырехугольника $KLMN$?

3. Назовем натуральное число n 2016-инвариантным, если сумма цифр числа n совпадает с суммой цифр числа $n+2016$. Найдите наибольшее четырехзначное 2016-инвариантное число.

4. Вершины правильного десятиугольника покрашены в два цвета – красный и синий (каждая вершина ровно в один цвет). Известно, что при любом повороте десятиугольника вокруг центра количество вершин, которые переходят в вершины другого цвета, меньше 32%. Докажите, что вершин какого-то цвета не больше 20%.

5. Натуральные числа от 1 до 3000 записаны по кругу. Известно, что для любого числа n среди 1499 чисел, стоящих ДО него по часовой стрелке, и среди 1499 чисел, идущих ПОСЛЕ него по часовой стрелке, одинаковое количество чисел, меньших n. какое число стоит напротив 2017?

6. Найдите все такие простые числа p, что число $p(p+3)$ – произведение двух последовательных натуральных чисел.

7. Есть белая доска 12×12, на которой трое ребят по очереди красят клетки в черный цвет. Очередным ходом можно покрасить любую ещё не покрашенную клетку, граничащую по стороне или вершине с клеткой, покрашенной на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Докажите, что второй и третий могут договориться и играть так, чтобы один из них победил.

8. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами a, b, c проведены три высоты h_a, h_b, h_c к соответствующим сторонам. Докажите, что из шести отрезков a, b, c, h_a, h_b, h_c можно сложить два треугольника.

9. Таблица 5×5 заполняется по правилам игры "Сапёр": в некоторые клетки ставится по одной мине, а в каждой из остальных клеток пишется количество мин во всех примыкающих к ней по стороне клетках. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех записанных чисел?

10. На доске написаны два числа 1000 и 2000. Разрешается дописать на доску число, равное среднему арифметическому любых двух чисел, уже написанных на доске, если это число целое и не написано на доске ранее. Сколько чисел в итоге будет написано на доске?

7 класс, первая лига, 1 тур, 24 ноября 2017

1. Известно, что натуральные числа n и m имеют соответственно 100 и 101 делитель. Может ли их произведение иметь ровно 2017 делителей?

2. Существуют ли такие выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$, что вершины K, L, M, N лежат на сторонах $ABCD$ (по одной на каждой стороне), при этом сумма диагоналей четырехугольника $ABCD$ меньше суммы диагоналей четырехугольника $KLMN$?

3. Назовем натуральное число n 99-инвариантным, если сумма цифр числа n совпадает с суммой цифр числа n+99. Сколько 99-инвариантных чисел среди натуральных чисел от 1 до 9999?

4. Олимпиада по математике проходила два дня, причем в оба дня школьникам давалось по 5 задач. Оказалось, что для каждого участника количество задач, решенных в первый день, на 1 отличается от количества задач, решенных им во второй день. Кроме того, для каждой задачи второго дня количество участников, решивших её, на 2 отличается от количества участников, решивших задачу с тем же номером в первый день. Докажите, что в олимпиаде приняло участие четное количество школьников.

5. Натуральные числа от 1 до 30 записаны по кругу. Известно, что для любого числа n среди 14 чисел, стоящих ДО него по часовой стрелке, и среди 14 чисел, идущих ПОСЛЕ него по часовой стрелке, одинаковое количество чисел, меньших n. какое число стоит напротив 2017?

6. На Новый Год ребята соорудили гирлянду из 2000 красных лампочек. Проверяющим не понравилась гирлянда, и первый проверяющий приказал заменить каждую вторую лампочку на зеленую. Второй проверяющий приказал заменить каждую третью лампочку на красную. Третий проверяющий приказал заменить каждую четвертую лампочку на зеленую и так далее. Сколько лампочек красного цвета останется в итоговой гирлянде?

7. Найдите три наименьших последовательных натуральных числа, сумма которых заканчивается на 2017

8. Есть белая доска 12×12, на которой трое ребят по очереди красят клетки в черный цвет. Очередным ходом можно покрасить любую ещё не покрашенную клетку, граничащую по стороне или вершине с клеткой, покрашенной на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Докажите, что второй и третий могут договориться и играть так, чтобы третий победил.

9. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $AC_1=BA_1=CB_1=B_1C_1=b$, $AB_1=a$ и $BC_1=CA_1=C_1A_1=B_1A_1=c$. Докажите, что $a=c$.

10. На доске написаны два числа 1 и 65. Разрешается дописать на доску число, равное среднему арифметическому любых двух чисел, уже написанных на доске, если это число целое и не написано на доске ранее. Сколько чисел в итоге будет написано на доске?

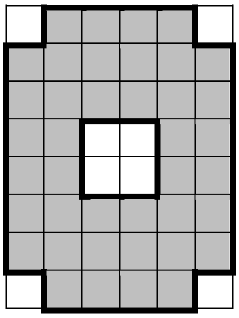
7 класс, вторая лига, 1 тур, 24 ноября 2017

1. Найдите три наименьших последовательных натуральных числа, сумма которых заканчивается на 2017

2. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, причем $BM = AB$. Прямая, проходящая через точку M, пересекает сторону AC в точке N, причем $MN = MC$. Докажите, что $AM \neq AN$.

3. Назовем натуральное число n девятиинвариантным, если сумма цифр числа n совпадает с суммой цифр числа n+9. Сколько девятиинвариантных чисел среди натуральных чисел от 1 до 999?

4. Прожектор освещает полуплоскость, граница которой проводит через точку, где расположен прожектор. Сама граница и точка тоже освещены. Если внутри этой полуплоскости расположен другой прожектор, то от него отбрасывается тень (линия). Каким наименьшим количеством прожекторов можно осветить все точки плоскости? Ставить два прожектора в одну точку нельзя.



5. Разрежьте фигуру (на рисунке закрашена серым) на 8 равных частей по линиям сетки хотя бы четырьмя разными способами. (фигуры считаются равными, если они совпадают при наложении).

6. На Новый Год ребята соорудили гирлянду из 2000 красных лампочек. Проверяющим не понравилась гирлянда, и первый проверяющий приказал заменить каждую вторую лампочку на зеленую. Второй проверяющий приказал заменить каждую третью лампочку на красную. Третий проверяющий приказал заменить каждую четвертую лампочку на зеленую и так далее. Сколько лампочек красного цвета останется в итоговой гирлянде?

7. Есть белая доска 8×8, на которой двое ребят по очереди красят клетки в черный цвет. Очередным ходом можно покрасить любую ещё не покрашенную клетку, граничащую по стороне или вершине с клеткой, покрашенной на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

8. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $AC_1=BA_1=CB_1=B_1C_1=b$, $AB_1=a$ и $BC_1=CA_1=C_1A_1=B_1A_1=c$. Докажите, что $a=c$.

9. Клетки квадрата 4×4 раскрашены в черный и белый цвета. На белую клетку попал муравей. С любой белой клетки он может перейти на любую соседнюю по стороне клетку, а на черной – погибает. После каждого перехода все клетки, соседние с покинутой, меняют свой цвет на противоположный. Существует ли раскраска, которая позволит муравью ползать вечно?

10. На кухне стояло 4 кувшина с молоком. Сынок Вася долго их изучал и понял, что какой кувшин ни выпей, то из оставшихся трех один кувшин будет всегда вдвое больше, чем два других, вместе взятых. Могло ли такое быть на самом деле или Вася ошибся?

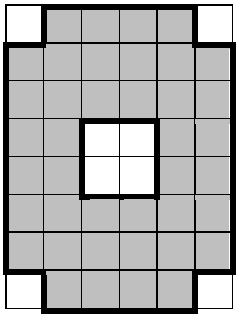
7 класс, третья лига, 1 тур, 24 ноября 2017

1. Существуют ли такие пять различных натуральных чисел, среди которых нет 2, при этом самое большое из них делится на все остальные, кроме того, все делятся на самое маленькое, а больше никакие два из этих чисел друг на друга не делятся?

2. Прямая, проходящая через вершину *A* треугольника *ABC*, пересекает сторону *BC* в точке *M*, причем $BM = AB$. Прямая, проходящая через точку *M*, пересекает сторону *AC* в точке *N*, причем $MN = MC$. Докажите, что $AM \neq AN$.

3. Назовем натуральное число *n* десятиинвариантным, если сумма цифр числа *n* совпадает с суммой цифр числа $n+10$. Сколько десятиинвариантных чисел среди натуральных чисел от 1 до 999?

4. Разрежьте фигуру (на рисунке закрашена серым) на 8 равных частей по линиям сетки хотя бы двумя разными способами. (Фигуры считаются равными, если они совпадают при наложении).



5. На Новый Год ребята соорудили гирлянду из 2000 красных лампочек. Проверяющим не понравилась гирлянда, и первый проверяющий приказал заменить каждую вторую лампочку на зеленую. Второй проверяющий приказал заменить каждую четвертую лампочку на синюю. Третий проверяющий приказал заменить каждую восьмую лампочку на фиолетовую и так далее. Каждый новый проверяющий придумывал новый цвет и менял в два раза меньше лампочек. Сколько лампочек красного цвета останется в итоговой гирлянде?

6. В записи 12345+678910 вычеркните четыре цифры так, чтобы получилась наименьшая сумма. Из каждого числа нужно вычеркнуть хотя бы по одной цифре.

7. На сторонах *BC*, *AC* и *AB* треугольника *ABC* выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $AC_1=BA_1=CB_1=B_1C_1=b$, $AB_1=a$ и $BC_1=CA_1=C_1A_1=B_1A_1=c$. Докажите, что $a=c$.

8. На кухне стояло 4 кувшина с молоком. Сынок Вася долго их изучал и понял, что какой кувшин ни выпей, то из оставшихся трех один кувшин будет всегда вдвое больше, чем два других, вместе взятых. Могло ли такое быть на самом деле или Вася ошибся?

9. Клетки квадрата 2×2 раскрашены в черный и белый цвета. На белую клетку попал муравей. С любой белой клетки он может перейти на любую соседнюю по стороне клетку, а на черной – погибает. После каждого перехода обе клетки, соседние с покинутой, меняют свой цвет на противоположный. Есть ли раскраска, которая позволит муравью ползать вечно?

10. Антон и Николай вышли одновременно навстречу друг другу, шли каждый со своей скоростью и встретились на расстоянии 1 км от Антона. На следующий день они снова одновременно вышли из дома и пошли навстречу друг другу со скоростью, вдвое большей, чем вчера. В результате они встретились в 3 км от дома Николая. Найдите расстояние между их домами.

8 класс, высшая лига, 1 тур, 24 ноября 2017

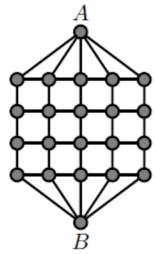
1. Есть полоска 1×2016, полностью из белых клеток. Костя и Сережа играют по таким правилам. Костя своим ходом может закрасить две соседние белые клетки, а Сергей – или одну белую клетку, или три соседние белые клетки, при этом если после хода на доске может появиться одиночная белая клетка, то ход запрещен. Игроки ходят по очереди, начинает Костя. Если доска не полностью окрашена, но ход сделать нельзя, то тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Если же все все клетки окрашены в черный цвет, то побеждает Костя. Кто победит при правильной игре?

2. Найдите все пары таких целых чисел t и x, что выполняются два соотношения $t^3–3t^2+3t–x = 0$ и $27(x–1)^4+(1–x^2)^3=0$.

3. Назовем натуральное число n 2016-инвариантным, если сумма цифр числа n совпадает с суммой цифр числа n+2016. Сколько 2016-инвариантных чисел среди натуральных чисел от 1 до 9999?

4. Вершины правильного n-угольника покрашены в два цвета – красный и синий (каждая вершина ровно в один цвет). Известно, что при любом повороте n-угольника вокруг центра количество вершин, которые переходят в вершины другого цвета, меньше 32%. Докажите, что вершин какого-то цвета не больше 20%.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC$, точки H и M лежат на прямой AC, BH и BM – соответственно высота и медиана треугольника ABC. Известно, что $MH = \frac{1}{2}AB$. Найдите углы треугольника ABC.



6. Найдите все такие простые числа p, что число $p(p+1)(p+3)$ – произведение двух последовательных натуральных чисел.

7. В некотором городе есть 22 площади, которые связаны друг с другом 41 улицей так, как показано на рисунке. Сколькими способами можно перекрыть одну или несколько улиц так, чтобы остался путь с площади A на площадь B?

8. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами a, b, c проведены три высоты h_a, h_b, h_c к соответствующим сторонам. Докажите, что из шести отрезков a, b, c, h_a, h_b, h_c можно сложить два треугольника.

9. Таблица 5×5 заполняется по правилам игры "Сапёр": в некоторые клетки ставится по одной мине, а в каждой из остальных клеток пишется количество мин во всех примыкающих к ней по стороне клетках. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех записанных чисел?

10. На доске написаны два числа 10^6 и 10^9. Разрешается дописать на доску число, равное среднему арифметическому любых двух чисел, уже написанных на доске, если это число целое и не написано на доске ранее. Сколько чисел в итоге будет написано на доске?

8 класс, первая лига, 1 тур, 24 ноября 2017

1. Известно, что натуральные числа n и m имеют соответственно 100 и 101 делитель. Может ли их произведение иметь ровно 2017 делителей?

2. Найдите все пары таких целых чисел t и x, что выполняются два соотношения $t^3-3t^2+3t-x=0$ и $27(x-1)^3+(1-x^2)^3=0$.

3. Назовем натуральное число n 99-инвариантным, если сумма цифр числа n совпадает с суммой цифр числа n+99. Сколько 99-инвариантных чисел среди натуральных чисел от 1 до 9999?

4. Прожектор освещает угол 90°, включая границу и вершину, в которой он расположен. Если внутри этого угла расположен другой прожектор, то от него отбрасывается тень. Каким наименьшим количеством прожекторов можно осветить все точки плоскости? Ставить два прожектора в одну точку нельзя.

5. Вершина A треугольника ABC совпадает с вершиной параболы $y=x^2$, а точки B и C лежат на параболе так, что отрезок BC параллелен оси OX. Площадь треугольника ABC равна 64. Найдите длину BC.

6. Найдите все такие простые числа p, что число $p(p+3)$ – произведение двух последовательных натуральных чисел.

7. Олимпиада по математике проходила два дня, причем в оба дня школьникам давалось по 5 задач. Оказалось, что для каждого участника количество задач, решенных в первый день, на 1 отличается от количества задач, решенных им во второй день. Кроме того, для каждой задачи второго дня количество участников, решивших её, на 2 отличается от количества участников, решивших задачу с тем же номером в первый день. Докажите, что в олимпиаде приняло участие четное количество школьников.

8. Есть белая доска 12×12, на которой трое ребят по очереди красят клетки в черный цвет. Очередным ходом можно покрасить любую ещё не покрашенную клетку, граничащую по стороне или вершине с клеткой, покрашенной на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Докажите, что второй и третий могут договориться и играть так, чтобы третий победил.

9. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами a, b, c проведены три высоты h_a, h_b, h_c к соответствующим сторонам. Докажите, что из шести отрезков a, b, c, h_a, h_b, h_c можно сложить два треугольника.

10. На доске написаны два числа 10 и 650. Разрешается дописать на доску число, равное среднему арифметическому любых двух чисел, уже написанных на доске, если это число целое и не написано на доске ранее. Сколько чисел в итоге будет написано на доске?

8 класс, вторая лига, 1 тур, 24 ноября 2017

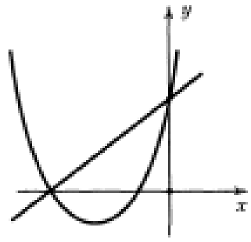
1. Известно, что натуральные числа n и m имеют соответственно 5 и 6 делителей. Может ли их произведение иметь ровно 17 делителей?

2. Существуют ли такие выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$, что вершины K, L, M, N лежат на сторонах $ABCD$ (по одной на каждой стороне), при этом сумма диагоналей четырехугольника $ABCD$ меньше суммы диагоналей четырехугольника $KLMN$?

3. Назовем натуральное число n 99-инвариантным, если сумма цифр числа n совпадает с суммой цифр числа n+99. Сколько 99-инвариантных чисел среди натуральных чисел от 1 до 9999?

4. Прожектор освещает угол 90°, включая границу и вершину, в которой он расположен. Если внутри этого угла расположен другой прожектор, то от него отбрасывается тень. Каким наименьшим количеством прожекторов можно осветить все точки плоскости? Ставить два прожектора в одну точку нельзя.

5. На рисунке представлены график функций $y=kx+1$ и $y=ax^2+bx+c$. Парабола пересекает ось OX в точках x_1 и x_2. Найдите отношение $\frac{x_1}{x_2}$, если $k=\sqrt{\frac{a}{2}}$. В ответе должно быть число.



6. На Новый Год ребята соорудили гирлянду из 2000 красных лампочек. Проверяющим не понравилась гирлянда, и первый проверяющий приказал заменить каждую вторую лампочку на зеленую. Второй проверяющий приказал заменить каждую третью лампочку на красную. Третий проверяющий приказал заменить каждую четвертую лампочку на зеленую и так далее. Сколько лампочек красного цвета останется в итоговой гирлянде?

7. Олимпиада по математике проходила два дня, причем в оба дня школьникам давалось по 5 задач. Оказалось, что для каждого участника количество задач, решенных в первый день, на 1 отличается от количества задач, решенных им во второй день. Кроме того, для каждой задачи второго дня количество участников, решивших её, на 2 отличается от количества участников, решивших задачу с тем же номером в первый день. Докажите, что в олимпиаде приняло участие четное количество школьников.

8. Найдите такие пары натуральных чисел n, m, что выполняются два равенства $n^2-2n-m=0$ и $(m+1)^2+4(1-m^2)=0$.

9. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $AC_1=BA_1=CB_1=B_1C_1=b$, $AB_1=a$ и $BC_1=CA_1=C_1A_1=B_1A_1=c$. Докажите, что $a=c$.

10. На доске написаны два числа 1 и 65. Разрешается дописать на доску число, равное среднему арифметическому любых двух чисел, уже написанных на доске, если это число целое и не написано на доске ранее. Сколько чисел в итоге будет написано на доске?

8 класс, третья лига, 1 тур, 24 ноября 2017

1. Существуют ли такие 2017 различных натуральных чисел, среди которых нет 2, при этом самое большое из них делится на все остальные, кроме того, все делятся на самое маленькое, а больше никакие два из этих чисел друг на друга не делятся?

2. Существуют ли такие выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$, что вершины K, L, M, N лежат на сторонах $ABCD$ (по одной на каждой стороне), при этом сумма диагоналей четырехугольника $ABCD$ меньше суммы диагоналей четырехугольника $KLMN$?

3. Назовем натуральное число n пятиинвариантным, если сумма цифр числа n совпадает с суммой цифр числа $n+5$. Сколько пятиинвариантных чисел среди натуральных чисел от 1 до 999?

4. Прожектор освещает полуплоскость, граница которой проводит через точку, где расположен прожектор. Сама граница и точка тоже освещены. Если внутри этой полуплоскости расположен другой прожектор, то от него отбрасывается тень (линия). Каким наименьшим количеством прожекторов можно осветить все точки плоскости? Ставить два прожектора в одну точку нельзя.

5. На Новый Год ребята соорудили гирлянду из 2000 красных лампочек. Проверяющим не понравилась гирлянда, и первый проверяющий приказал заменить каждую вторую лампочку на зеленую. Второй проверяющий приказал заменить каждую четвертую лампочку на синюю. Третий проверяющий приказал заменить каждую восьмую лампочку на фиолетовую и так далее. Каждый новый проверяющий придумывал новый цвет и менял в два раза меньше лампочек. Сколько лампочек красного цвета останется в итоговой гирлянде?

6. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $AC_1=BA_1=CB_1=B_1C_1=b$, $AB_1=a$ и $BC_1=CA_1=C_1A_1=B_1A_1=c$. Докажите, что $a=c$.

7. Есть белая доска 8×8, на которой двое ребят по очереди красят клетки в черный цвет. Очередным ходом можно покрасить любую ещё не покрашенную клетку, граничащую по стороне или вершине с клеткой, покрашенной на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

8. Найдите такие пары натуральных чисел n, m, что выполняются два равенства $n^2-2n-m=0$ и $(m+1)^2+4(1-m^2)=0$.

9. Клетки квадрата 4×4 раскрашены в черный и белый цвета. На белую клетку попал муравей. С любой белой клетки он может перейти на любую соседнюю по стороне клетку, а на черной – погибает. После каждого перехода обе клетки, соседние с покинутой, меняют свой цвет на противоположный. Есть ли раскраска, которая позволит муравью ползать вечно?

10. На кухне стояло 4 кувшина с молоком. Сынок Вася долго их изучал и понял, что какой кувшин ни выпей, то из оставшихся трех один кувшин будет всегда вдвое больше, чем два других, вместе взятых. Могло ли такое быть на самом деле или Вася ошибся?