Ижевский Командный Турнир Математиков

Решения отборочной устной олимпиады, октябрь 2017 г., 4 класс

1. У каждого из троих ребят есть старинные монеты, хотя бы одна. У Пети и Васи вместе на 6 монет больше, чем у Васи и Толи. Сколько монет у каждого, если у всех троих 10 монет?

Решение. Из условия следует, что Петя + Вася = Вася + Толя + 6. Не трудно понять, что из этого следует равенство Петя = Толя + 6. Давайте переберем количество монет Толи. По условию у него есть хотя бы 1 монета. Если у него ровно 1, то у Пети их 7, а у Васи остается 10 – 7 – 1 = 2. Заметим, что если у Толи хотя бы 2 монеты, то у Пети их хотя бы 8 и в сумме у них не менее 10 монет. Но тогда на Васю не остается монет совсем, что противоречит условию. Значит ответ всего один.

2. Инопланетянин Тау построил большую башню из одинаковых кубиков, ставя их один на другой. Потом он осмотрел её со всех сторон и даже сверху, посчитав квадратики. Всего он насчитал 2013 квадратиков. Сколько кубиков использовал Тау?

Решение. Заметим, что сверху видно ровно 1 кубик. Значит, на боковые стороны остается 2012 кубиков. Осталось 2012 : 4 и получить, что сбоку видно 503 кубика. Значит, башня была высотой 503 кубика.

3. Из спичек выложено равенство XIV – XVI = II. Переместите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.

Решение. XIV = XVI – II

4. Было 5 кусков пирога. Некоторые из них разрезали на три части. Всего стало 15 кусков. Сколько кусков разрезали?

Решение. Заметим, что разрезание одного куска на три части увеличивает общее число кусков на 2. Всего стало 15 кусков, тогда общее количество возросло на 15-5 =10. Следовательно, произошло 10 : 2 = 5 разрезаний и, соответственно, разрезали все 5 кусков.

5. Каждое из трех слагаемых на 10 меньше их суммы. Чему равны слагаемые? Ответ обоснуйте.

Решение. Предположим, что эти слагаемые a, b и c. Тогда из условий следует, что $a + 10 = a + b + c$, что равносильно тому, что $b + c = 10$. Если написать еще два подобных равенства получим $b + c = 10$, $a + c = 10$, $a + b = 10$. Теперь сложим их. Получаем $2 \times (a + b + c) = 30$ или $a + b + c = 15$. Подставив это в самое первое равенство получаем, что $a + 10 = 15$.Из этого следует, что $a = b = c = 5$.

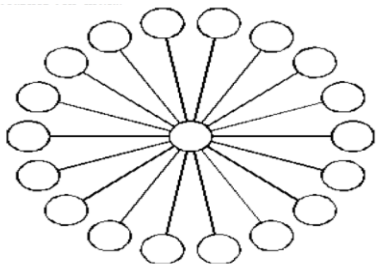
6. Петя учится каждый день, без выходных. 22 октября и 30 октября у него было 5 уроков. Каждый день у него было либо на 1 урок больше, либо на 1 урок меньше, чем в предыдущий день, но не более 7 уроков, причем однажды ему повезло, и в один из дней он учился только 1 урок. Сколько всего уроков было у него в период с 22 по 30 октября?

Решение. Заметим, что между днями, когда у Пети 5 уроков и 1 урок, должно пройти не менее чем три дня (там должны быть дни, когда 2, 3 и 4 урока). Но то же самое, верно и для расстояния между днями с 1 уроком и 5 уроками. Между 22 и 30 октября всего 7 дней. В один из дней должен быть 1 урок. Остается еще 6 дней, но мы только что сказали, что эти дни нам необходимы и определяются однозначно. Получаем единственный пример 5 4 3 2 1 2 3 4 5. Не трудно посчитать, что сумма равна 29.

7. Рассмотрим дату 7 октября 2017 года и запишем её как 071017. Можно ли поменять местами друг с другом какие-то две цифры, чтобы эта запись одинаково читалась спереди и сзади?

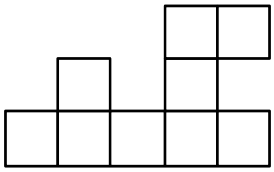
Решение. Пусть у нас получилось это сделать. Тогда на первом и последнем месте должны стоять одинаковые цифры. Мы не можем одновременно поменять первую и последнюю цифру (только между собой, но это не обеспечит их равенство). Значит либо на первом месте должна стоять 7, либо на последнем 0. В первом случае получается число 701017, а во втором 071710. Оба этих числа не являются палиндромами. Значит ответ нельзя.

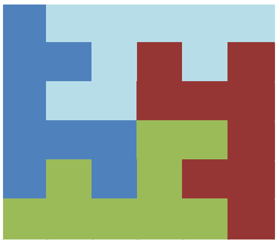
8. Разместите числа от 1 до 19 в кружках (в каждом кружке ровно одно число, каждое число должно быть записано один раз) так, чтобы любые три числа, расположенные на одной прямой, в сумме давали 30.



__Решение.__ Поместим число 10 в центр. А затем по кругу расставим числа в следующем порядке 1 – 2 – 3 - … - 9 – 19 – 18 - … - 11. Не трудно проверить, что сумма чисел на каждой прямой буде ровно 30.

9. Можно ли из четырех экземпляров фигурки, изображенной на рисунке, сложить квадрат?



__Решение.__ 

10. Вдоль дороги в ряд стоят 5 домов, причем в каждом живет хотя бы один человек. Два жителя называются соседями, если они живут в одном или в соседних домах. Приведите пример, когда у каждого жителя ровно 20 или ровно 30 соседей.

__Решение.__ Например, 10 – 11 – 10 – 10 – 11. Не трудно проверить, что во всех домах, кроме крайних, по 30 соседей, а в крайних по 20.

11. Доктор Айболит раздал трем заболевшим зверям 63 чудодейственные таблетки. Бегемот на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придётся съесть слону?

__Решение.__ Заметим, что слон получил на одну таблетку больше, чем бегемот, а тот, в свою очередь, на одну больше, чем носорог. Значит слон получил на 2 таблетки больше, чем носорог. Если бы все получили поровну (как носорог), тогда было бы роздано 60 таблеток (63 – 2 – 1), а значит носорог получил 20 таблеток, ну а слон 22.

12. У Оли есть одна палочка длиной 1 см, четыре палочки по 4 см и еще одна палочка длиной 5 см. Удастся ли Оле сложить из этих палочек (не ломая их) периметр прямоугольник?

__Решение.__ Допустим, что у Оли получилось сложить прямоугольник. Тогда его периметр равен 1 + 4 * 4 + 5 = 22. Вспомним, что периметр равен удвоенной сумме сторон. Значит сумма высоты и ширины прямоугольника равна 11. Но такого не может быть, т.к. если мы возьмем меньше двух палочек длины 4, то нам понадобится еще получить длину не менее 7, но сумма 1 + 5 < 7. А если взять ровно две палочки длины 4, то недостает еще 3, что мы тоже получить не можем. Три или более палочки длины 4 уже дают длину 12, что больше 11. Значит у Оли ничего не выйдет.

X Ижевский Командный Турнир Математиков

Решение отборочной устной олимпиады, октябрь 2017 г., 5 класс

1. У каждого из троих ребят есть старинные монеты, хотя бы одна. У Пети и Васи вместе на 6 монет больше, чем у Васи и Толи. Сколько монет у каждого, если у всех троих 10 монет?

Решение. Из условия следует, что Петя + Вася = Вася + Толя + 6. Не трудно понять, что из этого следует равенство Петя = Толя + 6. Давайте переберем количество монет Толи. По условию у него есть хотя бы 1 монета. Если у него ровно 1, то у Пети их 7, а у Васи остается 10 – 7 – 1 = 2. Заметим, что если у Толи хотя бы 2 монеты, то у Пети их хотя бы 8 и в сумме у них не менее 10 монет. Но тогда на Васю не остается монет совсем, что противоречит условию. Значит ответ всего один.

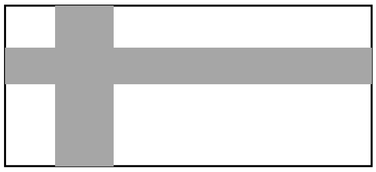
2. Инопланетянин Тау построил большую башню из одинаковых кубиков, ставя их один на другой. Потом он осмотрел её со всех сторон и даже сверху, посчитав квадратики. Всего он насчитал 2017 квадратиков. Сколько кубиков использовал Тау?

Решение. Заметим, что сверху видно ровно 1 кубик. Значит, на боковые стороны остается 2016 кубиков. Осталось 2016 : 4 и получить, что сбоку видно 504 кубика. Значит, башня была высотой 504 кубика.

3. Сколько существует девятизначных чисел, у которых все цифры различны и идут (слева направо) в порядке убывания? Ответ обоснуйте.

Решение. Всего существует 10 различных цифр. Нам нужно выбрать из них какие-то 9 для нашего числа. Очевидно, что это можно сделать 10 способами (просто потому, что есть ровно 10 способов выбрать число, которое мы НЕ берем). После того, как мы выбрали 9 цифр, они расставляются в числе однозначно, а значит таких чисел всего 10.

4. Крош и Ежик сделали флаг. Крош достал прямоугольный кусок белой ткани, а Ежик нашил на него две серых ленты, как показано на рисунке. Размеры вертикальной полосы 50 см × 10 см, а горизонтальной - 8 см × 80 см. Чему равна площадь белой части флага?



Решение. Высота флага совпадает с высотой вертикальной полосы и равна 50 см. Аналогично ширина флага равна 80см. Значит площадь всего флага равна 4000см^2. Вычтем из этой величины площади полос. 4000 – 640 – 500 = 2860см^2. Но площадь кусочка, лежащего на пересечении полос, мы вычли дважды, а нужно было всего один раз. Значит его нужно прибавить. Не трудно понять, что это прямоугольник 8 см × 10 см. Итого ответ 2860 + 80 = 2940 см^2.

5. Докажите, что клетчатый квадрат размером 6×6 клеток нельзя разрезать на 11 различных фигур так, чтобы все клетки остались целыми. Фигуры считаются различными, если никакие две из них нельзя наложить друг на друга так, чтобы они совместились.

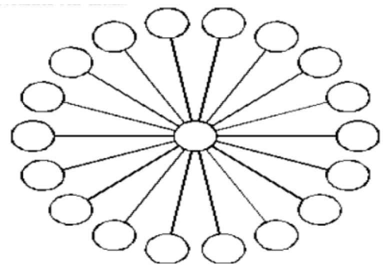
Решение. Давайте просто докажем, что 11 фигур не влезут в этот квадрат по площади. Будем брать фигурки минимальной возможной площади. Очевидно, что бывает всего одна фигурка площади 1 и одна фигурка площади 2. Площади 3 бывает уже две фигуры, а площади 4 целых четыре различных фигуры. Мы нашли 9 фигурок, площадь которых минимальна, но они уже заняли бы 1 + 2 + 3 * 3 + 4 * 4 = 28 клеток. А всего клеток 36. Значит на оставшиеся 8 клеток необходимо поместить 2 фигуры. Но это невозможно, т.к. мы уже использовали все фигуры площади меньше 5.

6. Петя учится каждый день, без выходных. 22 октября и 30 октября у него было 5 уроков. Каждый день у него было либо на 1 урок больше, либо на 1 урок меньше, чем в предыдущий день, но не более 7 уроков, причем однажды ему повезло, и в один из дней он учился только 1 урок. Сколько всего уроков было у него в период с 22 по 30 октября?

Решение. Заметим, что между днями, когда у Пети 5 уроков и 1 урок, должно пройти не менее чем три дня (там должны быть дни, когда 2, 3 и 4 урока). Но то же самое, верно и для расстояния между днями с 1 уроком и 5 уроками. Между 22 и 30 октября всего 7 дней. В один из дней должен быть 1 урок. Остается еще 6 дней, но мы только что сказали, что эти дни нам необходимы и определяются однозначно. Получаем единственный пример 5 4 3 2 1 2 3 4 5. Не трудно посчитать, что сумма равна 29.

7. Решите ребус $\mathrm{А} + \mathrm{А} + \overline{\mathrm{ББ}} = \overline{\mathrm{МММ}}$. (Каждую букву надо заменить цифрами, при этом одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры.) Найдите все решения и объясните, как вы нашли ответ.

Решение. Заметим, что даже если левая часть примет максимальное значение 9 + 9 + 99 = 117, что меньше чем 222. Значит $\overline{\mathrm{МММ}}$ = 111. Если $\overline{\mathrm{ББ}}$ = 99, то 2 * А = 111 – 99 = 12. Тогда А = 6. Если $\overline{\mathrm{ББ}}$ = 88, то 2 * А = 111 – 88 = 23. Но 2 * А < 19, а значит Б не может быть меньше 9. Значит решение всего одно: А = 6, Б = 9, М = 1.



8. Разместите числа от 1 до 19 в кружках (в каждом кружке ровно одно число, каждое число должно быть записано один раз) так, чтобы любые три числа, расположенные на одной прямой, в сумме давали 30.

Решение. Поместим число 10 в центр. А затем по кругу расставим числа в следующем порядке 1 – 2 – 3 - … - 9 – 19 – 18 - … - 11. Не трудно проверить, что сумма чисел на каждой прямой буде ровно 30.

9. Какое наименьшее одинаковое число карандашей нужно положить в каждую из 6 коробок так, что в любых 4 коробках нашлись карандаши любого из 26 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)? Докажите, что меньше невозможно.

Решение. Давайте представим, что карандашей какого-нибудь цвета у нас меньше 3. Тогда если мы возьмем 4 коробки, в которых его нет (а такие найдутся, т.к. карандашей не более 2ух), то условие задачи не выполнится. Значит карандашей каждого цвета не менее 3 и всего карандашей не менее, чем 26 * 3 = 78. Осталось сделать пример на 78. Давайте положим в первую, вторую и третью коробку по 13 карандашей цвета 1, 2, 3, …, 13 (пронумеруем цвета от 1 до 26). А в четвертую, пятую и шестую коробки – карандаши цвета 14, 15, …, 26. Тогда какие бы мы не взяли 4 коробки, мы обязательно возьмем карандаши всех цветов.

10. Какое наибольшее количество различных чисел можно выбрать таким образом, чтобы разность любых двух из них была не меньше 1 и не больше 3?

Решение. Возьмем наибольшее и наименьшее число. Разность между ними, по условию задачи, не больше 3. Значит между ними «помещается» не более 2 чисел. Получается, что чисел не более 4, например числа 2, 3, 4, 5.

11. Толя учится считать. Он берет двузначное число и перемножает его цифры. Если получилась цифра, то он останавливается, а если снова получилось двузначное число, то опять перемножает его цифры и так далее, пока не получится цифра (например, 39→27→14→4). В итоге у него получилось 8. Найдите все варианты, каким могло быть изначальное число?

Решение. 8 можно получить из чисел 18, 81, 24, 42. Число 18 можно получить из чисел 92, 29, 63, 36. 92 раскладывается на 2 * 2 * 23, а значит не раскладывается дальше (оно должно быть равно произведению двух цифр, в которые, очевидно, не может входить 23). 29 простое, 63 раскладывается как 79 и 97 (которые уже являются простыми). 36 единственным образом получается из 66 (которое уже не раскладывается, т.к. в разложении есть 11). 81 можно единственным образом получить из 99, которое не раскладывается дальше. 24 получается из 46 (включает в своем разложении 23 и не раскладывается) и 64. 64 можно разложить как 88 (дальше не раскладывается, т.к.

включает 11). И, наконец, 42 можно разложить в 76 (неразложимо, т.к. делится на 19)и 67 (простое). Мы перебрали все варианты и получили следующий набор ответов: 18, 81, 24, 42, 92, 29, 63, 36, 79, 97, 66, 99, 46, 64, 88.

12. Художник начал писать картину в последнюю пятницу февраля, а закончил во вторую среду марта. Сколько дней работал художник? Найдите все ответы

Решение. После последней пятницы февраля наступит среда. Она либо наступит в феврале, либо в марте. Но следующая среда точно будет в марте, т.к. между этими двумя средами февраля будет пятница, а значит, художник начал писать картину не в последнюю пятницу.

Если среда наступила в феврале, то до нее 5 дней и еще 14 дней до второй среды марта. Итого 19 дней. Если первая среда была уже в марте, то до нее опять 5 дней и еще 7 дней до второй среды. Итого 12 дней. Следовательно, художник работал 12 или 19 дней.

X Ижевский Командный Турнир Математиков

Решения отборочной устной олимпиады, октябрь 2017 г., 6 класс

1. В клетках таблицы 3×3 записаны нули. Можно ли заменить четыре нуля другими числами, чтобы все суммы по строкам и столбцам стали различными?

Решение. Да, например вот так.

0	2	4
1	0	3
0	0	0

2. Дедушка старше внука в 31 раз. Через сколько лет он будет старше внука в 7 раз, если известно, что сейчас дедушке больше 50, но не больше 90 лет?

Решение. Дедушка в 31 раз старше, значит его возраст кратен 31. В диапазона от 50 до 90 всего одно такое число – 62. Значит внуку сейчас 2 года. Пусть искомый момент наступит через x лет. Тогда имеем уравнение $7 * (2 + x) = 62 + x$. Осталось его решить. $14 + 7x = 62 + x$; $6x = 48$; $x = 8$. Значит это произойдет через 8 лет.

3. Разрешается к числу 2017 дописать одну цифру (в начало, в конец или вставить её между любыми двумя цифрами) так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. На 12 делятся только четные числа. Значит придется дописать в конец четную цифру. Число делится на 12, если одновременно делится на 3 и 4. По признаку делимости на 3 сумма цифр должна делиться на 3. Текущая сумма равна 10. Значит к ней надо прибавить 2, 5 (не подходит по четности) или 8. Если на конце стоит 2, то все условия выполняются. Если в конце будет стоять 8, число не разделится на 4(78 не делится на 4). Значит вариант всего 1, это число 20172.

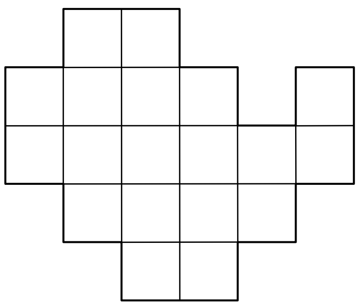
4. Замените в записи * + * + * + * + * + * + * + * = ** звездочки цифрами 0, 1, ..., 9 так, чтобы получилось верное равенство, а каждая цифра была использована ровно один раз.

Решение. Например, 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36

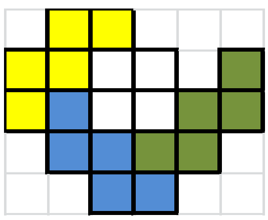
5. Про группу из пяти человек известно, что Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на два года старше Борисова, Вася на три года старше Васильева, Гриша на четыре года старше Григорьева. А еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

Решение. По очевидным причинам, сумма возрастов Алеши, Бори, Васи, Гриши и Дима равна сумме возрастов Алексеева, Борисова, Васильева, Григорьева и Дмитриева (это просто одни и те же люди). Но по условию сумма возрастов Алеши, Бори, Васи и Гриши на 1 + 2 + 3 + 4 больше, чем сумма Алексеева, Борисова, Васильева и Григорьева. Ну значит, чтобы создать равенство, Дима должен быть на 10 лет младше Дмитриева.

6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может вырезать из фигуры, показанной на рисунке справа, квадрат 2×2, а оставшуюся часть разрезать на три равные части. Не врет ли барон?



Решение. Барон не врет. Например, вот так.



7. Робин-Бобин Барабек грабил 40 человек. Сначала он отобрал 6 пончиков у первого человека, разделил их на несколько одинаковых кучек и одну из кучек съел. У каждого из следующих он также отбирал по 6 пончиков, затем делил все имеющиеся к этому моменту пончики на равные кучки, одну съедал и т.д. Ограбив последнего, он разделил пончики на 6 кучек, а потом съел 6 пончиков. Сколько всего пончиков съел Робин, если до начала серии ограблений пончиков у него не было?

Решение. Всего Робин-Бобин отобрал 40 * 6 = 240 пончиков. Осталось понять, сколько из них он НЕ съел. В конце он разделил не съеденные пончики на 6 равных кучек и съел одну из них, где было 6 пончиков. Значит, 5 * 6 = 30 пончиков он НЕ съел. А значит съел он все остальное 240 – 30 = 210 пончиков.

8. Назовем число убывающим, если его цифры записаны в порядке убывания, т.е. каждая цифра больше своей правой соседки, если она есть (42 и 760 – убывающие числа, а 883 - нет). Какое наименьшее количество убывающих чисел надо взять, чтобы получить в сумме 2017? Приведите пример и докажите, что меньше быть не может.

Решение. Заметим, что мы не можем использовать числа больше 1000, т.к. минимальное четырехзначное число 3210 уже больше, чем 2017. Значит, необходимо не менее 3 чисел (2 числа будут в сумме меньше 2000). Пример на 3 строится довольно просто 2017 = 987 + 987 + 43.

9. Есть квадрат 3×3, в каждой клетке которого написано некоторое число. За один вопрос можно указать квадрат 2×2 и спросить сумму чисел, записанных в нем. Можно ли за несколько ходов узнать число в каждом квадрате?

Решение. Давайте докажем, что такого алгоритма не существует. Допустим, нам не повезло и на все наши запросы нам отвечают, что сумма чисел в квадрате равна 1. Но тогда мы не сможем различить следующие два случая:

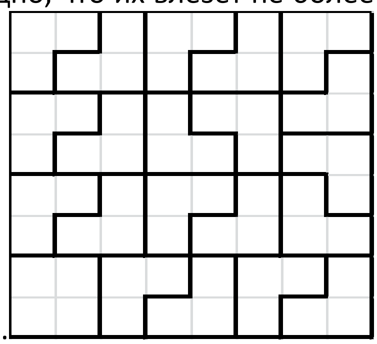
1	0	1
0	0	0
1	0	1

и

0	0	0
0	1	0
0	0	0

. А раз алгоритм не может различать какие-то два случая, то мы не можем гарантировать, что он может узнать число в каждом квадрате.

10. Петя разрезал шахматную доску по границам клеток на части одинакового периметра. Оказалось, что не все части равны. Каково наибольшее возможное число частей?

Решение. Минимальный периметр равен 4, но фигура периметра 4 всего одна. Следующий возможный периметр – 6. Но тут тоже только одна возможная фигура (прямоугольник 1 на 2). А вот периметра 8 бывает несколько фигур. Минимальная площадь такой фигуры – 3. Давайте попробуем поместить на доске как можно больше таких фигур. Очевидно, что их влезет не более 20 (если их 21, то они занимают площадь 63 и осталась всего 1 клетка).  Если попытаться использовать фигуры большего периметра, то и площадь, их, очевидно, будет не меньше 2. Значит, мы использовали фигуры наименьшей площади, а значит, их влезло наибольшее количество.

11. 100 рыбаков ловили рыбу, никто из них не остался без улова, но никто не поймал больше 7 рыб. При этом не более 6 рыб поймало 98 человек, не более 5 – 95 человек, не более 4 – 87 рыбаков, не более 3 – 80, не более 2 – 65 человек и не более одной – 30 человек. Сколько всего рыб поймали рыбаки?

Решение. Т.к. всего было 100 рыбаков и 98 поймали менее 7 рыб, 2 рыбака поймали ровно 7 рыб. 98 поймали 6 или менее, из них 95 поймали меньше 6. Значит, ровно 6 поймали 98 – 95 = 3 рыбака. Аналогично ровно 5 рыб поймали 95 – 87 = 8 рыбаков, ровно 4 рыбы 87 – 80 = 7 рыбаков, ровно 3 рыбы 80 – 65 = 15 рыбаков, ровно 2 рыбы 65 – 30 = 35 рыбаков и 1 рыбу поймали оставшиеся 30 рыбаков. Значит, в сумме они поймали 2 * 7 + 3 * 6 + 8 * 5 + 7 * 4 + 15 * 3 + 35 * 2 + 30 * 1 = 245 рыб.

12. Есть стакан, кружка и кофейник объемами 200, 300 и 400 мл соответственно. В кружке налито 200 мл кофе и растворен один кусочек сахара, а в кофейнике – 300 мл и два кусочка. Стакан пуст. Можно ли с помощью переливаний уравнять количество сахара в кружке и кофейнике так, чтобы стакан в итоге вновь оказался пустым? (Дополнительных емкостей и средств измерений нет).

Решение. Заметим, что как бы мы не переливали, объем кофе в каждом сосуде кратен 100. Определим концентрацию сахара, как количество кубиков на 100 мл кофе. Если кофе нет совсем, то будем считать концентрацию равной 0. Тогда после любого переливания концентрация в одном сосуде не изменится, а в другом не увеличится. Значит, концентрация в сосуде не может превышать 2/3 (эта концентрация бала в начале и не могла возрасти). Но, если мы уравняли количество сахара, то в одном из сосудов концентрация не менее, чем 1.5/2, но это больше, что 2/3. Получили противоречие.

X Ижевский Командный Турнир Математиков

Решения отборочной устной олимпиады, октябрь 2017 г., 7 класс

1. Зубр и лось вместе весят 1300 кг. Найти вес лося, если 1/6 веса лося равна 1/7 веса зубра.

<u>Решение.</u> Пусть 1/6 веса лося равна *x*, тогда весть лось весит 6*x*, а зубр 7*x*. Тогда вместе они весят 13*x* = 1300 кг. Отсюда *x* = 100 кг и лось весит 600 кг.

2. У Мальвины были золотые колечки массой 1 г, 3 г, 4 г, 6 г, 8 г, 9 г, 11 г, 12 г и 16 г. Алиса и Базилио украли по 4 кольца. При этом Алисе досталось втрое больше золота, чем Базилио. Сколько весит оставшееся кольцо?

<u>Решение.</u> По условию, Алис досталось втрое больше золота, чем Базилио, а значит в сумме они украли кратное 4 число грамм (3 части + 1 часть). Сумма всех колец равна 70г. 70 дает остаток 2 при делении на 4, а значит и оставшееся кольцо должно давать такой остаток. Но такое кольцо всего одно. Значит оставшееся кольцо весит 6г.

3. В классе больше 20, но меньше 30 человек, дни рождения у всех разные. Петя сказал: «Тех, кто старше меня в классе, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня в классе, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько человек в классе?

<u>Решение.</u> Из слов Пети ясно, что без него в классе кратное 3 число учеников (2 части + 1 часть). В данном диапазоне лежат числа 22, 25 и 28. Аналогично, из слов Кати понятно, что без нее в классе кратное 4 число учеников. Нам подходят числа 21, 25, 29. Раз оба высказывания верны, необходимо число удовлетворяющее обоим условием, это число 25.

4. В социальной сети год назад 30% пользователей были дети, 50% - взрослые и 20% - пенсионеры. За год количество детей увеличилось на 100%, взрослых — на 80%, а пенсионеров — на 150%. Сколько теперь процентов от общего числа пользователей составляют пользователи-дети, взрослые, пенсионеры?

<u>Решение.</u> Изначально было 0,3**X* детей (*X* –количество пользователей), а стало в 2 раза больше, т.е. 0,6**X.* Аналогично взрослых было 0,5**X,* а стало 0,9**X,* и пенсионеров было 0,2*X,* а стало 0,5*X*. Итого стало 2**X*. Значит детей теперь 0,6 / 2 = 0,3 или 30%. Взрослых 0,9 / 2 = 0,45 или 45%. А пенсионеров 0,5 / 2 = 0,25 или 25%.

5. Барон Мюнхгаузен посмотрел на два произведения: $1\frac{1}{10}\cdot 1\frac{1}{11}\cdot 1\frac{1}{12}\cdot\dots\cdot 1\frac{1}{99}$ и $1\frac{1}{100}\cdot 1\frac{1}{101}\cdot 1\frac{1}{102}\cdot\dots\cdot 1\frac{1}{999}$ и сказал, что это равные целые числа. Не ошибся ли он?

<u>Решение.</u> Приведём все к неправильным дробям. Получаем $\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{13}{12}\cdot\dots\cdot\frac{100}{99}$. После сокращения имеем дробь $\frac{100}{10}=10$. Аналогично поступаем со вторым произведением. $\frac{101}{100}\cdot\frac{102}{101}\cdot\frac{103}{102}\cdot\dots\cdot\frac{1000}{999}$. После сокращения получаем $\frac{1000}{100}=10$, а значит, произведения равны.

6. Есть квадрат 3×3, в каждой клетке которого написано некоторое число. За один вопрос можно указать квадрат 2×2 и спросить сумму чисел, записанных в нем. Можно ли за несколько ходов узнать число в каждом квадрате?

<u>Решение.</u> Давайте докажем, что такого алгоритма не существует. Допустим, нам не повезло и на все наши запросы нам отвечают, что сумма чисел в квадрате равна 1. Но тогда мы не сможем различить следующие два случая:

1	0	1
0	0	0
1	0	1

и

0	0	0
0	1	0
0	0	0

. А раз алгоритм не может различать какие-то два случая, то мы не можем гарантировать, что он может узнать число в каждом квадрате.

7. Число называется современным, если оно отличается от числа 2017 в каждом разряде не более чем на 2. Сколько всего существует современных чисел?

__**Решение.**__ В разряде тысяч может стоять любая цифра от 1 до 4, в разряде сотен от 0 до 2, в десятках от 0 до 3 и в разряде единиц от 5 до 9. Перемножим эти варианты и получим ответ 4 * 3 * 4 * 5 = 240.

8. Найдите все решение ребуса, если одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные. ШИЛО $\times$ 14 = ШАЛАШ.

__**Решение.**__ Заметим, что ШАЛАШ четное число, значит Ш – четная цифра, не равная 0. Запишем умножение в столбик.

	ш	и	л	о
			1	4
	4ш	4и	4л	4о
ш	и	л	о	
ш	а	л	а	ш

. Заметим, что в разряд десятков тысяч не происходит перехода. Это значит, что ш = 2 (если ш не менее 4, то 4ш + и не менее 16 и переход произойдет). Заметим, что тогда 4о = 2. Небольшим перебором можно понять, что о = 3 или 8. Разберем оба случая. Первый:

	2	и	л	3
			1	4
	8	4и	4л	12
2	и	л	3	
2	а	л	а	2

. Очевидно, что и не может быть больше 1, т.к. тогда 8 + и будет больше 10 и произойдет переход через десяток. Пусть и = 0.

	2	0	л	3
			1	4
	8	0	4л	12
2	0	л	3	
2	а	л	а	2

. Получаем, что 0 + л = л, а значит перехода через десяток туда не было. 4л + 3 дают переход через десяток при л > 1, а значит л = 1 (0 уже занят). Дальше все строится однозначно:

	2	0	1	3
			1	4
	8	0	4	12
2	0	1	3	
2	8	1	8	2

.

Пусть и = 1.

	2	1	л	3
			1	4
	8	4	4л	12
2	1	л	3	
2	а	л	а	2

. Заметим, что 4 + л = л, но перехода через десяток там не должно быть, т.к. 8 + 1 уже равняется 9. Значит, этот вариант отпадает.

	2	и	л	8
			1	4
	8	4и	4л	32
2	и	л	8	
2	а	л	а	2

Второй случай: (см. таблицу выше). Аналогично замечаем, что и не может равняться 1, т.к.

	2	0	л	8
			1	4
	8	0	4л	32
2	0	л	8	
2	а	л	а	2

4и + л = л даст переход через десяток. Если и = 0, то (см. таблицу выше), но и этот случай не подходит, т.к. 4л + 8 + 3 неизбежно даст переход через десяток в разряд сотен и там не выполнится равенство л + 0 = л. Итого решение всего одно.

9. Пусть *p* – простое число. Известно, что *p*–1 – произведение двух простых чисел, а *p*+1 – произведение трех простых чисел. Найдите *p*.

Решение. Произведение двух наименьших простых чисел равно 2 * 2 = 4. Это значит, что *p*-1 не менее 4, а *p* не менее 5. Все простые числа больше 2 – нечетные. Это значит, что *p* – 1 и *p* + 1 – четные. Заметим, что нам даны 3 последовательных числа. Это значит, что среди них есть кратное 3 и 4. Переберем число, которое будет кратно 3. Если это первое число, то оно должно равняться 6 (четное и кратное 3, значит 2 * 3 = 6), и тройка чисел 6 – 7 – 8. Второе число не может делиться на 3 (простое и больше 3). Если третье число делится на 3, то оно либо делится на 4, тогда имеем тройку 10 – 11 – 12, либо первое число делится на 4 и мы имеем тройку 4 – 5 – 6. Итого *p* равняется 5, 7 или 11.

10. У шестизначного числа произведение любых трех цифр одинаково, а сумма цифр равна 16. Сколько таких чисел существует?

Решение. Пусть в нашем числе нет нулевых цифр. Тогда если мы возьмем любые 4 числа *a, b, c, d* для них будет выполняться равенство *abc = abd.* Сократив все на *ab*, получаем, что *c = d*. Таким образом мы доказали, что все числа будут попарно равны. Но так быть не может, т.к. 16 не делится на 6 нацело.

Значит нулевые цифры там есть. Пусть их меньше 4. Тогда мы можем взять тройку ненулевых цифр и их произведение будет отличаться от тройки, где есть 0. Получается, нулевых цифр 4 или 5. Если их 5, то единственная ненулевая цифра равняется 16, чего, очевидно, быть не может. Значит ненулевых цифр две. Это либо две восьмерки, либо девять и семь. Если мы ставим две восьмерки, то на первое место мы ее поставить обязаны, а вторая восьмерка встает на любое из 5 оставшихся мест. В случае 9 и 7 все тоже самое, только количество вариантов удваивается (на первое место либо 9, либо 7). Итого вариантов 10 + 5 = 15.

11. После прогулки в лесу дети стали считать грибы. Оказалось, что не подосиновиков собрано вдвое больше, чем не сыроежек. А сыроежек вдвое больше, чем подосиновиков и груздей. Единственный белый гриб нашёл Саша, кроме того было найдено несколько маслят. Каких грибов собрано больше — груздей или маслят?

Решение. Всего были найдены подосиновики (пусть их П), сыроежки (С), грузди (Г), белые грибы (Б = 1), маслята(М) и, возможно, другие грибы (пусть их Х). Тогда по условию задачи С + Г + 1 + М + Х = 2 * (П + Г + 1 + М + Х), а также С = 2 * (П + Г). Подставим значение С в первое равенство и раскроем скобки. 2П + 3Г + 1 + М + Х = 2П + 2Г + 2М + 2Х + 2; приведя подобные получим Г = 1 + М + Х. Даже если Х = 0, груздей хотя бы на 1 гриб больше, чем маслят.

12. Организаторы лотереи выпустили миллион билетов со всеми шестизначными номерами от 000000 до 999999. Группа друзей выкупила все билеты, которые они считали счастливыми, а именно, билеты с такими номерами $\overline{abcdef}$, что $a\cdot f+b\cdot e+c\cdot d = 100$. Докажите, что сумма номеров остальных билетов делится на 13.

<u>Решение.</u> Заметим, что числа вида $\overline{abcabc}$ делятся на 1001 (а, соответственно, и на 13), а значит никак не влияют на кратность всей суммы. Забудем про числа такого вида. Все оставшиеся числа разбиваются на непересекающиеся пары $\overline{abcdef}$ и $\overline{defabc}$. Причем, интересующая нас сумма у этих чисел равная. А это значит, что в паре оба числа счастливые или несчастливые. Следовательно, все несчастливые билеты также стоят в парах, и каждая такая пара в сумме дает число кратное 13 ($\overline{abcdef}$ + $\overline{defabc}$ = 1001 * ($\overline{abc}$ + $\overline{def}$)).

X Ижевский Командный Турнир Математиков

Решения отборочной устной олимпиады, октябрь 2017 г., 8 класс

1. Зубр и лось вместе весят 1300 кг. Найти вес лося, если 1/6 веса лося равна 1/7 веса зубра.

Решение. Пусть 1/6 веса лося равна *x*, тогда весть лось весит 6*x*, а зубр 7*x*. Тогда вместе они весят 13*x* = 1300 кг. Отсюда *x* = 100 кг и лось весит 600 кг.

2. Вдоль дороги в ряд стоят 5 домов, причем в каждом живет хотя бы один человек, причем в любых двух разных домах живет разное число жителей. Два жителя называются соседями, если они живут в одном или в соседних домах. Известно, что у каждого жителя ровно 20 или ровно 30 соседей. Сколько жителей живет в крайних домах?

Решение. Из условия задачи следует, что для любого дома верно, что сумма людей в нем и его соседях равняется 21 или 31. Обозначим жителей в домах за x-y-z-f-w. Тогда x + y не может равняться 31, т.к. тогда x + y + z > 31. Значит, x + y = 21, а x + y + z = 31. Отсюда следует, что z = 10. Заметим, что y + z + f не может равняться 31, т.к. тогда f = x. Выразим все переменные через x. Получаем x – (21-x) – 10 – (x – 10) – (31-x). Из количества жителей 4 дома следует, что x не менее 11. Но 11 быть не может, т.к. тогда во втором доме 10 жителей. При 12 получаем 12 – 9 – 10 – 2 – 19, при 13 13 – 8 – 10 – 3 – 18, при 14 14 – 7 – 10 - 4 – 17, при 15 15 – 6 – 10 – 5 – 16, при 16 16 – 5 – 10 – 6 – 15. Дальше можно не разбирать, случаи будут симметричные уже разобранным. Итого в крайних домах живут, либо 12 и 19, либо 13 и 18, либо 14 и 17, либо 15 и 16.

3. В классе больше 20, но меньше 30 человек, дни рождения у всех разные. Петя сказал: «Тех, кто старше меня в классе, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня в классе, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько человек в классе?

Решение. Из слов Пети ясно, что без него в классе кратное 3 число учеников (2 части + 1 часть). В данном диапазоне лежат числа 22, 25 и 28. Аналогично, из слов Кати понятно, что без нее в классе кратное 4 число учеников. Нам подходят числа 21, 25, 29. Раз оба высказывания верны, необходимо число удовлетворяющее обоим условием, это число 25.

4. В социальной сети год назад 30% пользователей были дети, 50% - взрослые и 20% - пенсионеры. За год количество детей увеличилось на 100%, взрослых — на 80%, а пенсионеров — на 150%. Сколько теперь процентов составляют Сколько теперь процентов от общего числа пользователей составляют пользователи-дети, взрослые, пенсионеры?

Решение. Изначально было 0,3**X* детей (*X* –количество пользователей), а стало в 2 раза больше, т.е. 0,6**X.* Аналогично взрослых было 0,5**X,* а стало 0,9**X,* и пенсионеров было 0,2*X,* а стало 0,5*X*. Итого стало 2**X*. Значит детей теперь 0,6 / 2 = 0,3 или 30%. Взрослых 0,9 / 2 = 0,45 или 45%. А пенсионеров 0,5 / 2 = 0,25 или 25%.

5. Барон Мюнхгаузен посмотрел на два произведения: $1\frac{1}{10}\cdot 1\frac{1}{11}\cdot 1\frac{1}{12}\cdot \dots \cdot 1\frac{1}{99}$ и $1\frac{1}{100}\cdot 1\frac{1}{101}\cdot 1\frac{1}{102}\cdot \dots \cdot 1\frac{1}{999}$ и сказал, что это равные целые числа. Не ошибся ли он?

Решение. Приведём все к неправильным дробям. Получаем $\frac{11}{10} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{13}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{99}$. После сокращения имеем дробь $\frac{100}{10} = 10$. Аналогично поступаем со вторым произведением. $\frac{101}{100} \cdot \frac{102}{101} \cdot \frac{103}{102} \cdot \ldots \cdot \frac{1000}{999}$. После сокращения получаем $\frac{1000}{100} = 10$, а значит, произведения равны.

6. Есть квадрат 3×3, в каждой клетке которого написано некоторое число. За один вопрос можно указать квадрат 2×2 и спросить сумму чисел, записанных в нем. Можно ли за несколько ходов узнать сумму чисел в квадрате 3×3?

Решение. Давайте докажем, что такого алгоритма не существует. Допустим, нам не повезло и на все наши запросы нам отвечают, что сумма чисел в квадрате равна 1. Но тогда мы не сможем различить следующие два случая:

1	0	1
0	0	0
1	0	1

и

0	0	0
0	1	0
0	0	0

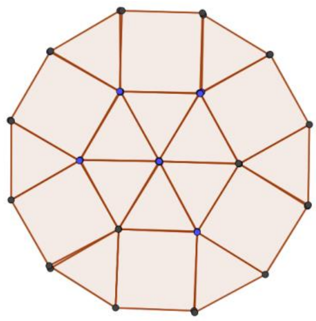
. А значит, что в этом случае никакой алгоритм не сможет понять, чему равна сумма чисел, 4 или 1.

7. Клетки доски 6×6 раскрашены в несколько цветов. При этом все прямоугольники 1×2 раскрашены по-разному. При каком наименьшем количестве цветов такое возможно? Ответ обоснуйте.

Решение.

8. Имеется запас кусочков в виде правильных треугольников и квадратов, при этом все их стороны равны. Из этих кусочков Вова хочет выложить выпуклый многоугольник. Какое наибольшее количество сторон он может получить?

Решение. Для начала приведем пример на 12. Теперь докажем, что 13 и более получить невозможно. Пусть у нас *X* сторон. Тогда сумма углов такого многоугольника 180*X* – 360. Теперь посмотрим на вершину нашего многоугольника. Там может сходиться 1 или 2 треугольника, квадрат, или квадрат + треугольник. Все остальные варианты дают угол больше 180. Среди всех этих вариантов самый большой угол получается, когда сходится квадрат и треугольник - 150º. Тогда имеем уравнение $180X - 360 \leq 150X$. Решаем его и получаем, что $X \leq 12$, что и требовалось доказать.

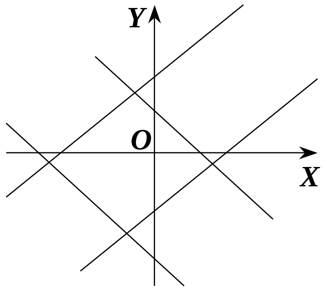


9. Вершину *A* прямоугольника *ABCD* соединили с серединами сторон *BC* и *CD*. Мог ли один из этих отрезков оказаться вдвое больше другого?

Решение. Пусть это возможно. Назовем стороны прямоугольника 2*a* и 2*b*. Тогда по теореме Пифагора $2\sqrt{4a^2 + b^2} = \sqrt{4b^2 + a^2}$. Возведем обе части в квадрат, получим $16a^2 + 4b^2 = 4b^2 + a^2$; $15a^2 = 0$. Но это невозможно, т.к. стороны прямоугольника не равны 0.

10. Дан треугольник *ABC*. *M* – середина стороны *AB*, точки *K* и *L* лежат на стороне *AB*, *K* лежит между *A* и *B*, *AK*=*KL*=*LB*. Докажите, что *CK*+*CL* ≥ 2*CM*.

Решение. Разделим сторону *AB* на 6 равных частей. Тогда *AK* будет равняться двум частя, а *AM* – трем частям. Значит, *KM* равняется одной части. Аналогично *LM* равен одной части. Рассмотрим треугольник *KCL. MC* в нем медиана. Значит надо доказать, что удвоенная медиана меньше сумму двух сторон. Продлим медиану за точку *M* на свою длину. Полученный четырехугольник *KCLC'* является параллелограммом, т.к. его диагонали делятся точкой пересечения пополам. Теперь по неравенству треугольника $C'K + KC > 2CM$, но $C'K = CL$, что и требовалось доказать.



11. Графики линейных функций $y = k_1x+b_1$, $y = k_2x+b_2$, $y = k_3x+b_3$, $y = k_4x+b_4$ ограничивают на координатной плоскости параллелограмм, внутри которого лежит начало координат (см. рис.). Докажите, что $k_1k_2k_3k_4b_1b_2b_3b_4 > 0$.

Решение. При $x = 0$ ровно два графика имеют положительное значение. Это значит, что среди свободных членов два положительны и два отрицательно, из чего следует, что их произведение положительно. Аналогично, два графика возрастаю, а два убывают. Значит, среди коэффициентов k ровно два положительны и два отрицательны. Следовательно, произведение коэффициентов положительно и произведение $k_1k_2k_3k_4b_1b_2b_3b_4$ также больше нуля.

12. На одной из клеток клетчатой плоскости стоит кубик. На каждой грани кубика нарисована стрелочка в одном из четырёх направлений, параллельных сторонам грани. Антон смотрит на кубик сверху и перекатывает его через ребро в направлении, указанном стрелкой, нарисованной на верхней грани. Докажите, что кубик никогда не заметет никакого квадрата 5×5.

Решение.