IX МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *10 бегунов стартуют одновременно: пятеро в синих майках с одного конца беговой дорожки, пятеро в красных майках — с другого. Их скорости постоянны и различны, причём скорость каждого бегуна больше 9 км/ч, но меньше 12 км/ч. Добежав до конца дорожки, каждый бегун сразу бежит назад, а, вернувшись к месту своего старта, заканчивает бег. Тренер ставит в блокноте галочку каждый раз, когда встречаются (лицом к лицу или один догоняет другого) двое бегунов в разноцветных майках (больше двух бегунов в одной точке за время бега не встречались). Сколько галочек поставит тренер к моменту, когда закончит бег самый быстрый из бегунов?* (И. Рубанов)

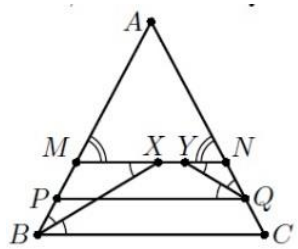
Ответ. 50. **Решение**. Покажем, что к моменту финиша самого быстрого бегуна любые двое разноцветных бегунов встретились ровно два раза, откуда и будет вытекать ответ $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$.

Пусть s (км) — длина дорожки. Положим $T = 2s/12$ (ч). Так как скорость самого быстрого бегуна меньше 12 км/ч, он дважды пробежит дорожку за время, большее T. Покажем, что все возможные встречи бегунов случатся раньше, чем после старта истечёт T часов.

Возьмём двух разноцветных бегунов. Первая их встреча случится, когда они вместе пробегут длину дорожки, и это произойдёт раньше, чем через $s/18 = T/3 < T$ часов. Когда более быстрый из этих двоих пробежит всю дорожку, более медленный, скорость которого составляет более $9/12 = 3/4$ скорости более быстрого, пробежит уже больше 3/4 длины дорожки и потому более быстрый, повернув, не успеет его догнать (для этого он должен был бы бежать по крайней мере вчетверо быстрее более медленного). Значит, вторая встреча этих двоих случится, когда оба будут бежать назад. К этому моменту они вместе пробегут расстояние $3s$, и это произойдёт раньше, чем через $3s/18 = T$ часов, что и завершает доказательство.

2. *Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится.* (С. Волчёнков)

Решение. Пусть p — достаточно большое нечётное простое число. Представим число p^2 в виде суммы $a_1+\ldots+a_6$ различных натуральных чисел, не делящихся на p. Числа $pa_1, \ldots, pa_6$ будут искомыми: произведение любых двух из них не делится на их сумму, равную p^3, а произведение любых трёх — делится. Пример получается уже при $p = 5$: разложение $25 = 1+2+3+4+6+9$ даёт набор чисел 5, 10, 15, 20, 30, 45.



3. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что PQ || BC. На биссектрисах треугольников ABC и APQ, исходящих из вершин B и Q, выбраны точки X и Y соответственно так, что XY || BC. Докажите, что PX = CY.* (А. Кузнецов, в редакции С. Берлова и И. Богданова)

Решение. Обозначим через M и N точки пересечения прямой XY со сторонами AB и AC соответственно. Заметим, что $\angle MXB = \angle XBC = \angle MBX = \angle NQY = \angle YQP = \angle NYQ$, поэтому $MX = MB = NC$ и $NY = NQ = MP$. Кроме того, $\angle CNY = \angle PMX$. Следовательно, треугольники PMX и YNC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $PX = YC$. **Замечание**. Аналогичное решение можно получить, обозначив через T точку пересечения BX и PQ и доказав, что треугольники PTX и CQY равны.

4. *Между городами страны организованы двусторонние беспосадочные авиарейсы таким образом, что от каждого города до каждого другого можно добраться (возможно, с пересадками). Более того, для каждого города A существует город B такой, что любой из остальных городов соединён напрямую с A или с B. Докажите, что от любого города можно добраться до любого другого не более, чем с двумя пересадками.* (И. Богданов)

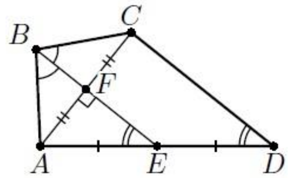
Решение. Пусть X и Y — произвольные два города, а $X, Z_1, \ldots, Z_k, Y$ — маршрут между ними с наименьшим числом пересадок. Предположим, что $k \geq 3$. Тогда Z_2 не соединён рейсом ни с X, ни с Y, иначе наш маршрут можно бы было бы сократить, воспользовавшись этим рейсом. По условию, существует город B такой, что каждый город, отличный от Z_2 и B, соединён рейсом хотя бы с одним из них. Значит, каждый из городов X и Y либо соединён с B, либо сам является городом B. Но, если $X \neq B \neq Y$, то существует маршрут X, B, Y с одной пересадкой, в противном случае существует даже рейс между X и Y. В любом случае мы получили противоречие с выбором k. Значит, предположение неверно, и $k \leq 2$. В силу произвольности выбора X и Y требуемое утверждение доказано.

IX МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

5. *На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек?* (Л. Самойлов)

Ответ. Не могло. **Решение**. В первом круге обоими соседями каждого лжеца были рыцари. Сопоставив каждому лжецу его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не меньше, чем лжецов. В втором круге обоими соседями каждого рыцаря были лжецы. Сопоставив каждому рыцарю его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не больше, чем лжецов. Получается, что рыцарей и лжецов на острове поровну. Но тогда на острове чётное число жителей, а число 2017 — нечётное.



6. *В выпуклом четырёхугольнике ABCD биссектриса угла B проходит через середину стороны AD, а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD.* (С. Берлов)

Ответ. $\angle ACD = 90°$. **Решение**. Пусть E — середина стороны AD, а F — точка пересечения BE и AC. Из условия имеем: $\angle B = 360° - 2(\angle A + \angle D)$, откуда $\angle AEB = 180° - \angle A - \angle B/2 = \angle D$. Значит, $BE \parallel CD$, и EF — средняя линия треугольника ACD, то есть $AF = FC$. Таким образом, BF — биссектриса и медиана треугольника ABC, а, значит, и его высота. Следовательно, прямая CD, параллельная BF, также перпендикулярна AC, откуда и вытекает ответ.

7. *Имеется клетчатая доска размером $2n \times 2n$. Петя поставил на неё $(n+1)^2$ фишек. Кот может одним взмахом лапы смахнуть на пол любую одну фишку или две фишки, стоящие в соседних по стороне или углу клетках. За какое наименьшее количество взмахов кот заведомо сможет смахнуть на пол все поставленные Петей фишки?* (С. Берлов, Н. Власова)

Ответ. n^2+n. **Решение**. *Оценка*. Разделим доску на n^2 квадратов 2×2. Кот может смахнуть любые две фишки, стоящие в одном квадрате. Пока фишек на доске больше, чем n^2, у него есть возможность смахнуть две фишки, то есть он сможет сделать это по крайней мере $n+1$ раз (после n таких действий на доске ещё остаётся $n^2+1 > n^2$ фишек). Смахивая оставшиеся фишки поодиночке, кот обойдётся $(n+1)+(n^2-1) = n^2+n$ взмахами. *Пример*. Разобьём доску на квадраты 2×2. Рассмотрим диагональ, идущую из левого нижнего угла в правый верхний. В левый нижний квадрат поставим 4 фишки, а в остальные, которые пересекает эта диагональ — по 3 фишки так, чтобы левая нижняя клеточка осталась пустой. Во все квадраты выше диагонали поставим по одной фишке в левый верхний угол, во все квадраты ниже — в правый нижний угол. Получим ровно $(n^2-n)+3n+1 = (n+1)^2$ фишек. Так как кот не может при данной расстановке фишек одним взмахом сбить фишки из разных квадратов, чтобы сбить все диагональные фишки, необходимо хотя бы $2n$ взмахов, на остальные фишки — n^2-n взмахов, то есть всего — n^2+n взмахов.

8. *На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечетных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 3+2\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{10000000}$?* (И. Богданов)

Ответ. Можно. **Решение**. Так как на доске написано 33 нечётных числа, в первую минуту будет дописана сумма попарных произведений, среди которых $33\cdot 32/2$ нечётных. Значит, дописанное число будет чётным, и на доске останется ровно 33 нечётных числа. Повторяя эти рассуждения, получаем, что на доске в любой момент будет ровно 33 нечётных числа.

Пусть A_n — число, записанное на n-й минуте, а S_n — сумма всех чисел на доске перед дописыванием A_n. По доказанному, число S_n нечётно. Число A_{n+1} отличается от A_n на сумму всех попарных произведений, в которых участвует A_n, то есть на S_nA_n. Итак, $A_{n+1} = A_n+A_nS_n = A_n(1+S_n)$. Поскольку число $1+S_n$ чётно, получаем, что степень двойки, на которую делится A_{n+1}, больше, чем степень двойки, на которую делится A_n. Итак, эта степень возрастает с каждой минутой хотя бы на 1, и через 10000000 минут A_n наверняка будет делиться на $2^{10000000}$.