МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016/17 ГОДА, 7 класс

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Через точку на плоскости провели 10 прямых. Могли ли среди 20 углов, на которые эти прямые разбивают плоскость, оказаться 11 углов величинами в 3°, 6°, 9°, 12°, 15°, 18°, 21°, 24°, 27°, 30° и 33° соответственно?* (И. Рубанов)

Ответ: Не могли. **Решение**. Углы, на которые 10 прямых разбивают плоскость, образуют 10 пар вертикальных углов. Так как вертикальные углы равны, величины этих 20 углов могут принимать не больше 10 различных значений, а у нас значений 11.

2. *10 бегунов стартуют одновременно: пятеро в синих майках с одного конца беговой дорожки, пятеро в красных майках — с другого. Их скорости постоянны и различны, причём скорость каждого бегуна больше 9 км/ч, но меньше 12 км/ч. Добежав до конца дорожки, каждый бегун сразу бежит назад, а, вернувшись к месту своего старта, заканчивает бег. Тренер ставит в блокноте галочку каждый раз, когда встречаются (лицом к лицу или один догоняет другого) двое бегунов в разноцветных майках (больше двух бегунов в одной точке за время бега не встречались). Сколько галочек поставит тренер к моменту, когда закончит бег самый быстрый из бегунов?* (И. Рубанов)

Ответ. 50. **Решение**. Покажем, что к моменту финиша самого быстрого бегуна любые двое разноцветных бегунов встретились ровно два раза, откуда и будет вытекать ответ $2\cdot5\cdot5 = 50$.

Пусть s (км) — длина дорожки. Положим $T = 2s/12$ (ч). Так как скорость самого быстрого бегуна меньше 12 км/ч, он дважды пробежит дорожку за время, большее T. Покажем, что все возможные встречи бегунов случатся раньше, чем после старта истечёт T часов.

Возьмём двух разноцветных бегунов. Первая их встреча случится, когда они вместе пробегут длину дорожки, и это произойдёт раньше, чем через $s/18 = T/3 < T$ часов. Когда более быстрый из этих двоих пробежит всю дорожку, более медленный, скорость которого составляет более $9/12 = 3/4$ скорости более быстрого, пробежит уже больше 3/4 длины дорожки и потому более быстрый, повернув, не успеет его догнать (для этого он должен был бы бежать по крайней мере вчетверо быстрее более медленного). Значит, вторая встреча этих двоих случится, когда оба будут бежать назад. К этому моменту они вместе пробегут расстояние $3s$, и это произойдёт раньше, чем через $3s/18 = T$ часов, что и завершает доказательство.

3. *Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится.* (С. Волчёнков)

Решение. Пусть p — достаточно большое нечётное простое число. Представим число p^2 в виде суммы $a_1+\ldots+a_6$ различных натуральных чисел, не делящихся на p. Числа $pa_1, \ldots, pa_6$ будут искомыми: произведение любых двух из них не делится на их сумму, равную p^3, а произведение любых трёх — делится. Пример получается уже при $p = 5$: разложение $25 = 1+2+3+4+6+9$ даёт набор чисел 5, 10, 15, 20, 30, 45.

4. *Между городами страны организованы двусторонние беспосадочные авиарейсы таким образом, что от каждого города до каждого другого можно добраться (возможно, с пересадками). Более того, для каждого города A существует город B такой, что любой из остальных городов соединён напрямую с A или с B. Докажите, что от любого города можно добраться до любого другого не более, чем* ***а)*** *с тремя пересадками;* ***б)*** *с двумя пересадками.* (И. Богданов)

Решение. **а)** Пусть X и Y — произвольные два города, а $X, Z_1, \ldots, Z_k, Y$ — маршрут между ними с наименьшим числом пересадок. По условию найдется такой город B, что каждый из городов, отличных от X и B, соединён либо с X, либо с B. Тогда каждый из городов $Z_2, \ldots, Z_k, Y$ соединён с B — иначе маршрут $X, Z_1, \ldots, Z_k, Y$ можно было бы сократить. Но в этом случае существует маршрут с тремя пересадками: X, Z_1, Z_2, B, Y.

б) Пусть X и Y — произвольные два города, а $X, Z_1, \ldots, Z_k, Y$ — маршрут между ними с наименьшим числом пересадок. Предположим, что $k \geq 3$. Тогда Z_2 не соединён рейсом ни с X, ни с Y, иначе наш маршрут можно бы было бы сократить, воспользовавшись этим рейсом. По условию, существует город B такой, что каждый город, отличный от Z_2 и B, соединён рейсом хотя бы с одним из них. Значит, каждый из городов X и Y либо соединён с B, либо сам является городом B. Но, если $X \neq B \neq Y$, то существует маршрут X, B, Y с одной пересадкой, в противном случае существует даже рейс между X и Y. В любом случае мы получили противоречие с выбором k. Значит, предположение неверно, и $k \leq 2$. В силу произвольности выбора X и Y требуемое утверждение доказано.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016/17 ГОДА, 7 класс

Решения заданий регионального этапа, 2 день

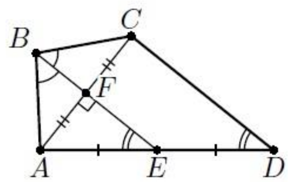
5. *Вася поставил на прямой точки A, B и C (не обязательно в таком порядке). Оказалось, что сумма расстояний AB+BC+AC равна 20 см. Всегда ли Петя сможет отметить точку D так, чтобы сумма расстояний AB+BC+AC+AD+BD+CD равнялась 31 см?*

Ответ. Всегда. **Решение**. Пусть точка B лежит между A и C. Тогда $AB+BC+AC = 2AC$, откуда $AC = 10$. Выберем из отрезков AB и BC более длинный и поставим на нём точку D в 1 см от B. Тогда $AB+BC+AC+AD+BD+CD = 20+(AD+CD)+BD = 20+10+1 = 31$.

6. *На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек?* (Л. Самойлов)

Ответ. Не могло. **Решение**. В первом круге обоими соседями каждого лжеца были рыцари. Сопоставив каждому лжецу его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не меньше, чем лжецов. В втором круге обоими соседями каждого рыцаря были лжецы. Сопоставив каждому рыцарю его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не больше, чем лжецов. Получается, что рыцарей и лжецов на острове поровну. Но тогда на острове чётное число жителей, а число 2017 — нечётное.

7. *В выпуклом четырёхугольнике ABCD биссектриса угла B проходит через середину стороны AD, а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD.* (С. Берлов)



Ответ. $\angle ACD = 90°$. **Решение**. Пусть E — середина стороны AD, а F — точка пересечения BE и AC. Из условия имеем: $\angle B = 360°-2(\angle A+\angle D)$, откуда $\angle AEB = 180°-\angle A-\angle B/2 = \angle D$. Значит, $BE \parallel CD$, и EF — средняя линия треугольника ACD, то есть $AF = FC$. Таким образом, BF — биссектриса и медиана треугольника ABC, а, значит, и его высота. Следовательно, прямая CD, параллельная BF, также перпендикулярна AC, откуда и вытекает ответ.

8. *Имеется клетчатая доска размером $2n\times 2n$. Петя поставил на неё $(n+1)^2$ фишек. Кот может одним взмахом лапы смахнуть на пол любую одну фишку или две фишки, стоящие в соседних по стороне или углу клетках. За какое наименьшее количество взмахов кот заведомо сможет смахнуть на пол все поставленные Петей фишки?* (С. Берлов, Н. Власова)

Ответ. n^2+n. **Решение**. *Оценка*. Разделим доску на n^2 квадратов 2×2. Кот может смахнуть любые две фишки, стоящие в одном квадрате. Пока фишек на доске больше, чем n^2, у него есть возможность смахнуть две фишки, то есть он сможет сделать это по крайней мере $n+1$ раз (после n таких действий на доске ещё остаётся $n^2+1 > n^2$ фишек). Смахивая оставшиеся фишки поодиночке, кот обойдётся $(n+1)+(n^2-1) = n^2+n$ взмахами.

Пример. Разобьём доску на квадраты 2×2. Рассмотрим диагональ, идущую из левого нижнего угла в правый верхний. В левый нижний квадрат поставим 4 фишки, а в остальные, которые пересекает эта диагональ — по 3 фишки так, чтобы левая нижняя клеточка осталась пустой. Во все квадраты выше диагонали поставим по одной фишке в левый верхний угол, во все квадраты ниже — в правый нижний угол. Получим ровно $(n^2-n)+3n+1 = (n+1)^2$ фишек. Так как кот не может при данной расстановке фишек одним взмахом сбить фишки из разных квадратов, чтобы сбить все диагональные фишки, необходимо хотя бы $2n$ взмахов, на остальные фишки — n^2-n взмахов, то есть всего — n^2+n взмахов.